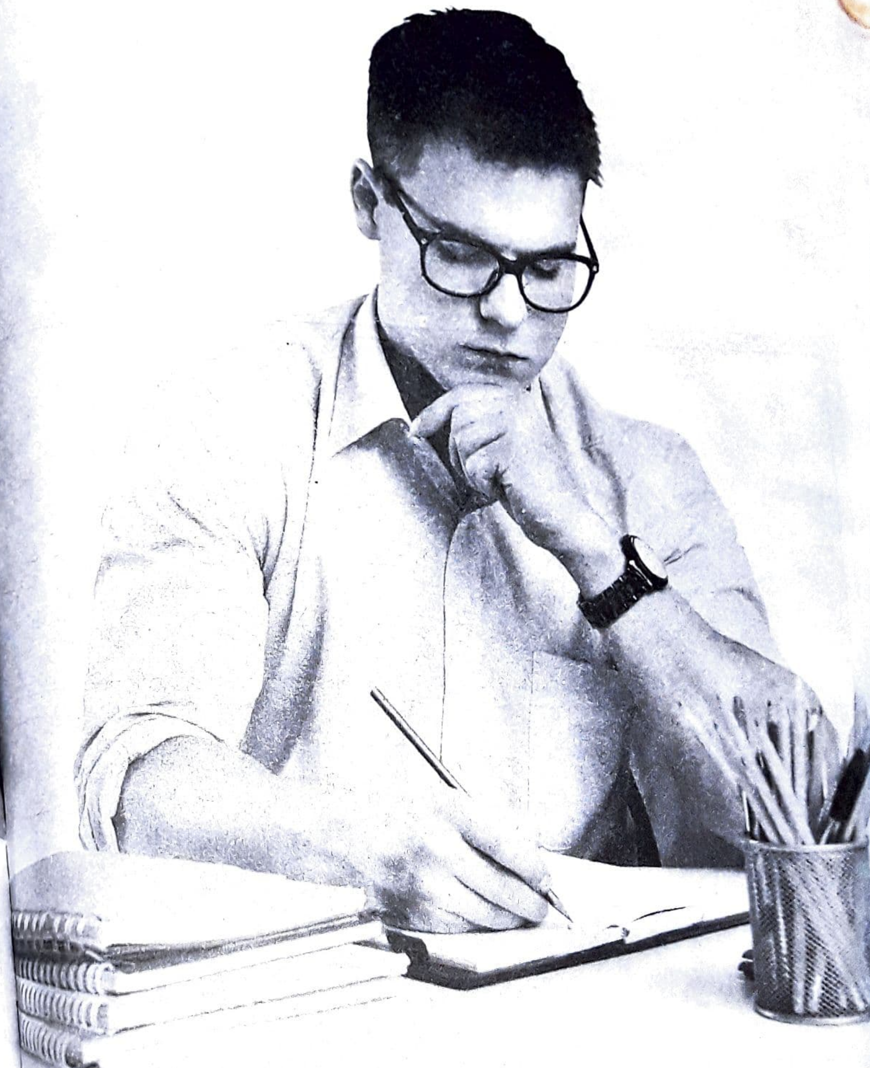
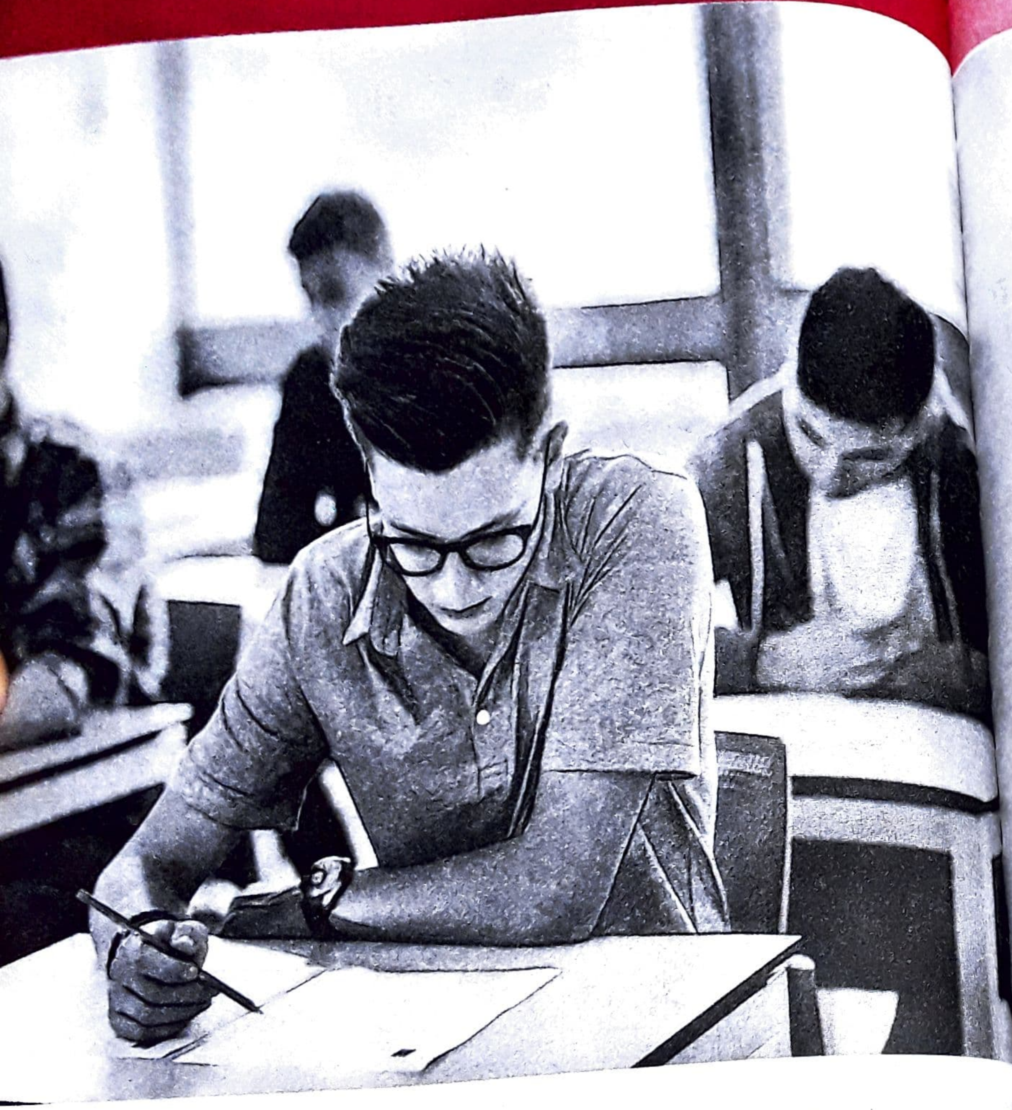
ثانيًا

إجابات
الهندسة الفراغية



إجابات الوحدة الأولى



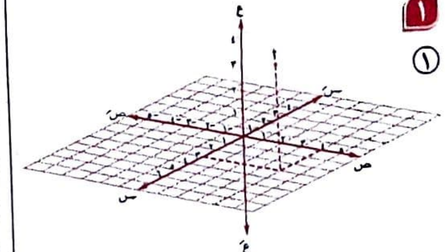
- الهندسة والقياس فى ثلاثة أبعاد

حلول تمارين 1

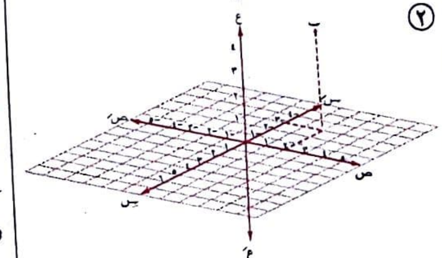
أولا تمارين على النظام الإحداثى المتعامد فى ثلاثة أبعاد

١

①



②



٢

① $أب = \sqrt{(٧-١)^{٢} + ٠^{٢} + (٤)^{٢}} = ٢\sqrt{١٣}$

② $أب = \sqrt{(٤-٢)^{٢} + (١-١)^{٢} + (٩-٦)^{٢}}$

$= \sqrt{١٣}$

③ $أب = \sqrt{(١+٢)^{٢} + (١+٣)^{٢} + (-٧+٧)^{٢}} = ٥$

٣

① $\left(\frac{١+٤}{٢} ، \frac{(-٣)+(-١)}{٢} ، \frac{٢+٤}{٢}\right)$

$= \left(\frac{٥}{٢} ، -٢ ، ٣\right)$

② $\left(\frac{٢+(-٦)}{٢} ، \frac{٥+٣}{٢} ، \frac{-٢+٤}{٢}\right) = (-٢ ، ٤ ، ١)$

③ $\left(\frac{-٣+(-٦)}{٢} ، \frac{٥+٤}{٢} ، \frac{٥+٨}{٢}\right)$

$= \left(\frac{-٩}{٢} ، \frac{٩}{٢} ، \frac{١٣}{٢}\right)$

④ $\left(\frac{٥+٤}{٢} ، \frac{١+٢}{٢} ، \frac{٦+١}{٢}\right) = \left(\frac{٩}{٢} ، \frac{٣}{٢} ، \frac{٧}{٢}\right)$

٤

① (جـ) ② (جـ) ③ (جـ) ④ (أ) ⑤ (ب)

⑥ (ب) ⑦ (جـ) ⑧ (أ) ⑨ (ب) ⑩ (أ)

⑪ (جـ) ⑫ (أ) ⑬ (ب) ⑭ (د) ⑮ (ب)

⑯ (جـ) ⑰ (جـ) ⑱ (ب) ⑲ (ب) ⑳ (د)

㉑ (ب) ㉒ (ب) ㉓ (ب) ㉔ (ب)

㉕ أولًا : (ب) ثانيًا : (ب)

㉖ أولًا : (ب) ثانيًا : (د) ثالثًا : (ب)

㉗ أولًا : (جـ) ثانيًا : (ب) ثالثًا : (جـ)

رابعًا : (جـ)

٥

و (٠ ، ٠ ، ٠) ، أ (٣ ، ٠ ، ٠)

ب (٣ ، ٣ ، ٠) ، جـ (٠ ، ٣ ، ٠)

و' (٠ ، ٠ ، ٣) ، أ' (٣ ، ٠ ، ٣)

ب' (٣ ، ٣ ، ٣) ، جـ' (٠ ، ٣ ، ٣)

٦

① $ك + ٣ = ٠$ ∴ $ك = -٣$

∴ أ (٤ ، -٦ ، ٠)

② $م - ٣ = ٠$ ∴ $م = ٣$ أ (٠ ، ٠ ، ٧)

③ $ن + ٤ = ٥$ ∴ $ن = ١$ أ (٠ ، ٥ ، ٥)

④ $\sqrt{(٢ل)^{٢} + ل^{٢}} = ٢\sqrt{٥}$

∴ $٥ل^{٢} = ٢٠$ ∴ $ل^{٢} = ٤$ ∴ $ل = \pm ٢$

أ (٧ ، ٤ ، ٢) أو أ (٣ ، -٤ ، -٢)

⑤ ∵ أ $\in$ محور س ∴ $٢م - ن = ٠$ (١)

، $م + ن = -٣$ (٢)

بحل (١) ، (٢) معًا ينتج أن : $م = -١$ ، $ن = -٢$

∴ أ (-١ ، ٠ ، ٠)

٧

① $أب = \sqrt{(-١)^{٢} + (-١)^{٢} + (-٤)^{٢}} = ٣\sqrt{٢}$

$بجـ = \sqrt{(-٢)^{٢} + (-٢)^{٢} + (-٨)^{٢}} = ٦\sqrt{٢}$

$أجـ = \sqrt{(-٣)^{٢} + (-٣)^{٢} + (-١٢)^{٢}} = ٩\sqrt{٢}$

∵ أجـ = أب + بجـ

∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

② $أب = \sqrt{٤^{٢} + ١^{٢} + ١^{٢}} = ٣\sqrt{٢}$

$بجـ = \sqrt{٨^{٢} + ٢^{٢} + ٢^{٢}} = ٦\sqrt{٢}$

$أجـ = \sqrt{١٢^{٢} + ٣^{٢} + ٣^{٢}} = ٩\sqrt{٢}$

∵ أجـ = أب + بجـ

∴ أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

٨

$أب = \sqrt{١^{٢} + ٣^{٢} + (-٢)^{٢}} = \sqrt{١٤}$

$بجـ = \sqrt{(-٣)^{٢} + (-٢)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{١٤}$

$أجـ = \sqrt{(-٢)^{٢} + (١)^{٢} + (-٣)^{٢}} = \sqrt{١٤}$

∵ أب = بجـ = جـأ

∴ Δ أبجـ متساوى الأضلاع.

مساحته = $\frac{١}{٢} \sqrt{١٤} \times \sqrt{١٤} \times$ جا ٦٠°

$= \frac{٧\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مربعة.

٩

① $أب = \sqrt{٤^{٢} + (-٥)^{٢} + ٢^{٢}} = ٣\sqrt{٥}$

$بجـ = \sqrt{٣^{٢} + (-٧)^{٢} + (-١)^{٢}} = \sqrt{٥٩}$

$أجـ = \sqrt{١ + ٢^{٢} + ٣^{٢}} = \sqrt{١٤}$

∵ $(أب)^{٢} + (أجـ)^{٢} = (بجـ)^{٢}$

∴ Δ أبجـ قائم فى أ

∴ مساحته = $\frac{١}{٢} \times ٣\sqrt{٥} \times \sqrt{١٤}$

$= \frac{٣\sqrt{٧٠}}{٢}$ وحدة مربعة.

② $أب = \sqrt{٦^{٢} + (-٥)^{٢} + ١^{٢}} = \sqrt{٦٢}$

$بجـ = \sqrt{(-٢)^{٢} + (-١)^{٢} + ١^{٢}} = \sqrt{٦}$

$أجـ = \sqrt{٤^{٢} + (-٦)^{٢} + ٢^{٢}} = ٢\sqrt{١٤}$

∵ $(أب)^{٢} = (بجـ)^{٢} + (أجـ)^{٢}$

∴ Δ أبجـ قائم الزاوية فى جـ

∴ مساحته = $\frac{١}{٢} \times \sqrt{٦} \times ٢\sqrt{١٤}$

$= ٢\sqrt{٢١}$ وحدة مربعة.

١٠

$أب = \sqrt{٢^{٢} + (-٢)^{٢} + (-١)^{٢}} = ٣$

$بجـ = \sqrt{٢^{٢} + (-٢)^{٢} + ١^{٢}} = ٣$

$أجـ = \sqrt{٤^{٢} + (-٤)^{٢} + (٠)^{٢}} = ٤\sqrt{٢}$

∵ أب = بجـ

∴ Δ أبجـ متساوى الساقين.

١١

$أب = \sqrt{٢^{٢} + (-٢)^{٢} + (٣ - ك)^{٢}} = \sqrt{٨ + (٣ - ك)^{٢}}$

$بجـ = \sqrt{٢^{٢} + (-٢)^{٢} + (ك - ٣)^{٢}}$

$= \sqrt{٨ + (ك - ٣)^{٢}}$

∴ أب = بجـ لجميع قيم ك

∴ Δ أبجـ متساوي الساقين.

∵ $أجـ = \sqrt{٤^{٢} + (-٤)^{٢} + ٠} = ٤\sqrt{٢}$

Δ أبجـ يكون متساوى الأضلاع إذا كان

$\sqrt{٨ + (ك - ٣)^{٢}} = ٤\sqrt{٢}$

∴ $٨ + (ك - ٣)^{٢} = ٣٢$ ∴ $(ك - ٣)^{٢} = ٢٤$

∴ $ك - ٣ = \pm ٢\sqrt{٦}$ ∴ $ك = ٣ \pm ٢\sqrt{٦}$

١٢

نجعل ب (س ، ص ، ع)

$\left(\frac{٤ + س}{٢} ، \frac{-١ + ص}{٢} ، \frac{٣ + ع}{٢}\right) = (٥ ، ٥ ، ٩)$

② أب = √((١ - ١)² + (-١ - ١)² + (-٩ - ٦)²) ...
= √١٣١

③ أب = √((١ + ٢)² + (١ + ٣)² + (-٧ + ٧)²) = ٥

٣

① ((١ + ٤)/٢ ، ((-٣) + (-١))/٢ ، (٢ + ٤)/٢)
= (٥/٢ ، -٢ ، ٣)

② ((٢ + (-٦))/٢ ، (٥ + ٣)/٢ ، (-٢ + ٤)/٢) = (-٢ ، ٤ ، ١)

③ ((-٣ + (-٦))/٢ ، (٥ + ٤)/٢ ، (٥ + ٨)/٢)
= (-٩/٢ ، ٩/٢ ، ١٣/٢)

④ ((٥ + ٤)/٢ ، (١ + ٢)/٢ ، (٦ + ١)/٢) = (٩/٢ ، ٣/٢ ، ٧/٢)

① ك + ٣ = ٠ ∴ ك = -٣
∴ أ(٤ ، -٦ ، ٠)

② م - ٣ = ٠ ∴ م = ٣ أ(٠ ، ٠ ، ٧)

③ ن + ٤ = ٥ ∴ ن = ١ أ(٠ ، ٥ ، ٥)

④ √((٢ل)² + ل²) = ٢√٥
∴ ٥ل² = ٢٠ ∴ ل² = ٤ ∴ ل = ±٢
أ(٧ ، ٤ ، ٢) أو أ(٣ ، -٤ ، -٢)

⑤ ∵ أ ∈ محور س ∴ ٢م - ن = ٠ (١)
م + ن = -٣ (٢)
بحل (١) ، (٢) معًا ينتج أن : م = -١ ، ن = -٢
∴ أ(-١ ، ٠ ، ٠)

مساحته = ½ ...
= ٧√٣/٢ وحدة مربعة.

٩

① أب = √(٤² + (-٥)² + ٢²) = ٣√٥
ب حـ = √(٣² + (-٧)² + (-١)²) = √٥٩
أحـ = √(١ + ٢² + ٣²) = √١٤
∵ (أب)² + (أحـ)² = (ب حـ)²
∴ Δ أب حـ قائم في أ
∴ مساحته = ½ × ٣√٥ × √١٤
= ٣√٧٠/٢ وحدة مربعة.

∴ Δ أب حـ متساوي الساقين.
∵ أحـ = √(٤² + (-٤)² + ٠) = ٤√٢
Δ أب حـ يكون متساوي الأضلاع إذا كان
√(٨ + (ك - ٣)²) = ٤√٢
∴ ٨ + (ك - ٣)² = ٣٢ ∴ (ك - ٣)² = ٢٤
∴ ك - ٣ = ±٢√٦ ∴ ك = ٣ ± ٢√٦

١٢

نجعل ب (س ، ص ، ع)
((٤ + س)/٢ ، (-١ + ص)/٢ ، (٣ + ع)/٢) = (٥ ، ٥ ، ٩)

(٤ + س)/٢ = ٥ | (-١ + ص)/٢ = ٥ | (٣ + ع)/٢ = ٩
٤ + س = ١٠ | -١ + ص = ١٠ | ٣ + ع = ١٨
س = ٦ | ص = ١١ | ع = ١٥
∴ ب(٦ ، ١١ ، ١٥)

١٣

نجعل أ (س ، ص ، ع)
((٤ + س)/٢ ، (-٢ + ص)/٢ ، (ع + ١)/٢) = (-١ ، ٤ ، ٠)

(٤ + س)/٢ = -١ | (-٢ + ص)/٢ = ٤ | (ع + ١)/٢ = ٠
٤ + س = -٢ | -٢ + ص = ٨ | ع + ١ = ٠
س = -٦ | ص = ١٠ | ع = -١
∴ أ(-٦ ، ١٠ ، -١)

١٤

((ك - ٢ + ٢)/٢ ، (-١ + ن - ٧)/٢ ، (م + ٣ - ٢)/٢)
= (-١ ، ٦ ، -٥)

ك/٢ = -١ | (ن - ٨)/٢ = ٦ | (م + ١)/٢ = -٥
ك = -٢ | ن - ٨ = ١٢ | م + ١ = -١٠
| ن = ٢٠ | م = -١١
ك + م - ن = -٢ + (-١١) - ٢٠ = -٣٣

١٥

ء منتصف أب = (٤ ، ١ ، ١)
هـ منتصف ب حـ = (١ ، ٢ ، ٢)
و منتصف أحـ = (-١ ، ٦ ، ٠)
ء هـ = √(٣² + (-١)² + (-١)²) = √١١
هـ و = √(٢² + (-٤)² + (٢)²) = √٢٤ = ٢√٦
ء و = √(٥² + (-٥)² + (١)²) = √٥١
المحيط = √١١ + ٢√٦ + √٥١ ≃ ١٥,٤

١٦

أ(س ، ٠ ، ٠) ، ب(٠ ، ص ، ٠) ، حـ = (٠ ، ٠ ، ع)
∴ (س/٢ ، ص/٢ ، ٠) = (١ ، -١ ، ٠)
∴ س = ٢ ، ص = -٢
(٠ ، ص/٢ ، ع/٢) = (٠ ، -١ ، ٢)
∴ ص = -٢ ، ع = ٤
∴ منتصف أحـ هي ((٢ + ٠)/٢ ، ٠ ، (٠ + ٤)/٢)
= (١ ، ٠ ، ٢)

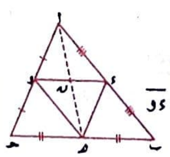
١٧

① أب = √(٢² + (-١)² + (-٢)²) = ٣
ب حـ = √(٢² + ٢² + ١²) = ٣
حـ ء = √(٢² + (-١)² + (-٢)²) = ٣
ء أ = √(٢² + ٢² + ١²) = ٣
أحـ = √(٤² + ١² + (-١)²) = ٣√٢
ب ء = √(٠² + ٣² + ٣²) = ٣√٢
∴ أب = ب حـ = حـ ء = ء أ
، أحـ = ء ب
∴ الشكل أب حـ ء مربع.

② أب = √(٢² + (-٣)² + ٦²) = ٧
ب حـ = √(٦² + ٢² + (-٣)²) = ٧
حـ ء = √(٢² + (-٣)² + ٦²) = ٧
ء أ = √(٦² + (٢)² + (-٣)²) = ٧
∴ أب = ب حـ = حـ ء = ء أ
∴ الشكل أب حـ ء معين.

١٨

نرسم أهـ فيقطع ءو في ن
ومن هندسة الشكل :



فإن أء هـ و متوازي أضلاع
∴ ن منتصف كل من أهـ ، ءو
∵ ن منتصف ءو
∴ ن = ((١ + ٢)/٢ ، (٢ + ٠)/٢ ، (٦ - ٢)/٢) = (٣/٢ ، ١ ، ٢)
، ن منتصف أهـ حيث أ = (س١ ، ص١ ، ع١)

∴ (٣/٢ ، ١ ، ٢) = ((س١ + ٠)/٢ ، (ص١ + ٣)/٢ ، (ع١ + ٢)/٢)
∴ س١ = ٣ ، ص١ = -١ ، ع١ = ٢
∴ أ = (٣ ، -١ ، ٢)
، ∵ ء منتصف أب حيث ب = (س٢ ، ص٢ ، ع٢)
∴ (١ ، ٢ ، ٦) = ((س٢ + ٣)/٢ ، (ص٢ - ١)/٢ ، (ع٢ + ٢)/٢)
∴ س٢ = -١ ، ص٢ = ٥ ، ع٢ = ١٠
∴ ب = (-١ ، ٥ ، ١٠)
، ∵ هـ منتصف ب حـ حيث حـ = (س٣ ، ص٣ ، ع٣)
∴ (٠ ، ٣ ، ٢) = ((س٣ - ١)/٢ ، (ص٣ + ٥)/٢ ، (ع٣ + ١٠)/٢)
∴ س٣ = ١ ، ص٣ = ١ ، ع٣ = -٦
∴ حـ = (١ ، ١ ، -٦)

ثانيا تمارين على معادلة الكرة

١

① (جـ)	② (د)	③ (ب)	④ (د)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (ب)	⑩ (جـ)	⑪ (أ)	⑫ (د)
⑬ (جـ)	⑭ (د)	⑮ (جـ)	⑯ (د)
⑰ (د)	⑱ (جـ)	⑲ (ب)	⑳ (د)
㉑ (جـ)	㉒ (جـ)	㉓ (د)	㉔ (جـ)
㉕ (ب)	㉖ (أ)		

٢

① (س - ٢)² + (ص + ١)² + (ع - ٤)² = ٩
② (س - ٤)² + (ص + ٢)² + (ع - ٣)² = ٥
③ س² + ص² + ع² = ٧
④ ٢ نق = √(٣² + ٢² + (-٤)²) = √٢٩
∴ نق = √٢٩/٢ المركز = (٣/٢ ، ٣ ، -١)
المعادلة : (س - ٣/٢)² + (ص - ٣)² + (ع + ١)²
= ٢٩/٤

⑤ ٢ نق = √(٦² + ٤² + (-٨)²) = ٢√٢٩
نق = √٢٩
المركز = (-١ ، ١ ، -١)
المعادلة : (س + ١)² + (ص - ١)² + (ع + ١)²
= ٢٩

⑥ نق = √(١² + ٥² + ٤²) = √٤٢
المعادلة :
(س - ١)² + (ص + ٦)² + (ع - ١)² = ٤٢

⑦ نق = √(١² + (-٢)² + (٢)²) = ٣
المعادلة : (س + ١)² + (ص - ٢)² + (ع + ٢)² = ٩

⑧ الكرة تمس المستوى س ص ∴ نق = ٣
المعادلة :
(س + ٢)² + (ص + ٥)² + (ع - ٣)² = ٩

⑨ نق = ٤
المعادلة : س² + (ص - ٤)² + ع² = ١٦

⑩ ∴ مركزها (٣ ، -١ ، ٢)
نق١ = √(٩ + ١ + ٤ + ٢) = ٤
∴ نق٢ = ٢ × ٤ = ٨
∴ المعادلة :
(س - ٣)² + (ص + ١)² + (ع - ٢)² = ٦٤

⑪ ∴ مركزها (٣ ، ٣ ، ٣)
المعادلة : (س - ٣)² + (ص - ٣)² + (ع - ٣)² = ٩

٣

① المركز = (٣ ، ٥ ، -٢) ، نق = ٥
، حجمها = ٤/٣ π × (٥)² = ٥٠٠/٣ π
② المركز = (٠ ، ٠ ، ٠) ، نق = ٣√٢
③ المركز = (-٢ ، ١ ، ٣)
، نق = √(٤ + ١ + ٩ - ١١) = √٣

④ $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ٦ ع = ٠$

∴ المركز $= (٠ ، ٠ ، ٣)$ ، نق $= ٣$

⑤ بقسمة المعادلة على (٣)

∴ $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - س - ٣ ص - ٢ ع + ١ = ٠$

المركز $= \left(\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢} ، ١\right)$

، نق $= \sqrt{\frac{١}{٤} + \frac{٩}{٤} + ١ - ١} = \frac{\sqrt{١٠}}{٢}$

∴ المساحة $= ٤ \pi \left(\frac{\sqrt{١٠}}{٢}\right)^{٢} = ١٠ \pi$ سم^{٢}

⑥ المركز $= (١ ، -٢ ، ٠)$

، نق $= \sqrt{١ + ٤ + ٠ - ٠} = \sqrt{٥}$

٤

مركز الكرة $(٢ ، -١ ، ٣)$

نجعل $ب = (س ، ص ، ع)$

$\left(\frac{-٦ + س}{٢} ، \frac{٣ + ص}{٢} ، \frac{٢ + ع}{٢}\right) = (٢ ، -١ ، ٣)$

$\frac{-٦ + س}{٢} = ٢$	$\frac{٣ + ص}{٢} = -١$	$\frac{٢ + ع}{٢} = ٣$
$-٦ + س = ٤$	$٣ + ص = -٢$	$٢ + ع = ٦$
$س = ١٠$	$ص = -٥$	$ع = ٤$

∴ $ب (١٠ ، -٥ ، ٤)$

٥

إذا كانت : $\left(\frac{أ}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} + \left(\frac{حـ}{٢}\right)^{٢} + ء > $ صفر

أى أن : $أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢} + ٤ ء > ٠$

٦

$م_{١} (٢ ، -٤ ، ٢)$ ، نق$_{١} = ١$

، $م_{٢} (-٤ ، ٤ ، ٢)$ ، نق$_{٢} = ٢$

∴ $م_{١} م_{٢} = \sqrt{٦^{٢} + (-٨)^{٢} + ٠^{٢}} = ١٠$ وحدات.

∵ نق$_{١}$ + نق$_{٢} < م_{١} م_{٢}$

∴ *الكرتان متباعدتان أى غير متقاطعتين.*

٧

$م_{١} = (٣ ، ٠ ، ٣)$ ، نق$_{١} = ٤$

، $م_{٢} = (-١ ، ٤ ، ك)$ ، نق$_{٢} = ٥$

∴ $م_{١} م_{٢} = \sqrt{(٤)^{٢} + (-٤)^{٢} + (٣ - ك)^{٢}}$

$= \sqrt{٣٢ + (٣ - ك)^{٢}}$

فى حالة التماس من الداخل : $م_{١} م_{٢} = |$نق$_{٢}$ - نق$_{١}|$

$\sqrt{٣٢ + (٣ - ك)^{٢}} = ٥ - ٤ = ١$

∴ $٣٢ + (٣ - ك)^{٢} = ١$

∴ $(٣ - ك)^{٢} = -٣١$ (مرفوض)

فى حالة التماس من الخارج : $م_{١} م_{٢} =$ نق$_{٢}$ + نق$_{١}$

∴ $\sqrt{٣٢ + (٣ - ك)^{٢}} = ٥ + ٤ = ٩$

∴ $٣٢ + (٣ - ك)^{٢} = ٨١$ ∴ $(٣ - ك)^{٢} = ٤٩$

∴ $٣ - ك = \pm ٧$ ∴ $ك = -١٠$ أو -٤

٨

① مركزها $(٠ ، ٠ ، ٣)$ أو $(٠ ، ٠ ، -٣)$ ، نق $= ٢$

المعادلة : $س^{٢} + ص^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٤$

أو $س^{٢} + ص^{٢} + (ع + ٣)^{٢} = ٤$

② النقطة على المحور س

∴ تمس المستوى ص ع ∴ نق $= ٣$

∴ المعادلة : $(س - ٣)^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٩$

③ نق $= ٣$

∴ المعادلة :

$(س + ٣)^{٢} + (ص - ٣)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ٩$

④ ∴ نق $= |-٣| = ٣$

المعادلة : $(س + ٣)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع - ٥)^{٢} = ٩$

⑤ نق $= |٤ - ٣| = ١$

المعادلة : $(س - ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع - ٤)^{٢} = ١$

⑥ نفرض أن معادلة الكرة :

$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص$

$+ ٢ ن ع + حـ = ٠$

$(٠ ، ٠ ، ٠) \in$ للكرة ∴ حـ $= ٠$

$(٠ ، ٠ ، ٤) \in$ للكرة ∴ $١٦ + ٨ ن + ٠ = ٠$

$ن = -٢$

، $(-٥ ، -٤ ، ١) \in$ للكرة

$٢٥ + ١٦ + ١ - ١٠ ل - ٨ ك - ٤ = ٠$

∴ $١٠ ل + ٨ ك = ٣٨$

∴ $٥ ل + ٤ ك = ١٩$ (١)

، $(٣ ، ٤ ، -٥) \in$ الكرة

$٩ + ١٦ + ٢٥ + ٦ ل + ٨ ك + ٢٠ = ٠$

$٦ ل + ٨ ك = -٧٠$

∴ $٣ ل + ٤ ك = -٣٥$ (٢)

من (١) ، (٢) : ∴ $ل = ٢٧$ ، $ك = -٢٩$

∴ المعادلة :

$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٥٤ س - ٥٨ ص + ٤ ع = ٠$

⑦ نفرض أن معادلة الكرة هى :

$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص$

$+ ٢ ن ع + حـ = ٠$

$(٤ ، ٠ ، ٠) \in$ للكرة

$١٦ + ٠ + ٠ + ٨ ل + ٠ + ٠ + حـ = ٠$

∴ $ل = \frac{-١}{٨} (حـ + ١٦)$

$(٠ ، ٤ ، ٠) \in$ للكرة ، $(٠ ، ٠ ، ٤) \in$ للكرة

∴ $ك = \frac{-١}{٨} (حـ + ١٦)$ ، $ن = \frac{-١}{٨} (حـ + ١٦)$

∴ $ل = ك = ن = \frac{-١}{٨} (حـ + ١٦)$

$ل^{٢} + ك^{٢} + ن^{٢} - حـ =$ نق^{٢}

∴ $٣ ل^{٢} - حـ =$ نق^{٢}

نق$^{٢} = ٣ \left(\frac{١}{٦٤} (حـ + ١٦)^{٢}\right) - حـ$

$= \frac{٣}{٦٤} (حـ^{٢} + ٣٢ حـ + ٢٥٦) - حـ$

$= \frac{٣}{٦٤} (حـ^{٢} + \frac{٣٢}{٣} حـ + ٢٥٦)$

$= \frac{٣}{٦٤} \left[(حـ + \frac{١٦}{٣})^{٢} + \frac{٢٠٤٨}{٩}\right]$

أقل قيمة نق عندما حـ $= \frac{-١٦}{٣}$

∴ نق$^{٢} = \frac{٢٠٤٨}{٩} \times \frac{٣}{٦٤}$

∴ نق $= \sqrt{\frac{٣٢}{٣}} = \frac{٤ \sqrt{٦}}{٣}$

$ل = \frac{-١}{٨} \left(\frac{-١٦}{٣} + ١٦\right) = \frac{-٤}{٣} = ك = ن$

∴ المركز $= \left(\frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣}\right)$

المعادلة : $\left(س - \frac{٤}{٣}\right)^{٢} + \left(ص - \frac{٤}{٣}\right)^{٢}$

$+ \left(ع - \frac{٤}{٣}\right)^{٢} = \frac{٣٢}{٣}$

حل آخر:

لكى تكون أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليس على استقامة واحدة فإنهم يقعوا جميعهم على أكبر دائرة فى الكرة يصنعوا مثلث متساوى الأضلاع أطوال أضلاعه $= ٤ \sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الدائرة الخارجة $= \frac{٤ \sqrt{٢}}{٢ \text{ جا } ٦٠} = \frac{٤ \sqrt{٦}}{٣}$

مركزها $\left(\frac{٤ + ٠ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٤ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + ٤}{٣}\right)$

$= \left(\frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣}\right)$

∴ المعادلة : $\left(س - \frac{٤}{٣}\right)^{٢} + \left(ص - \frac{٤}{٣}\right)^{٢}$

$+ \left(ع - \frac{٤}{٣}\right)^{٢} = \frac{٣٢}{٣}$

⑧ الكرة تمس مستويات الإحداثيات

س ع ، س ص ، ص ع

∴ مركز الكرة هو ($\pm$ نق ، $\pm$ نق ، $\pm$ نق)

، ∵ الكرة تمر بالنقطة ء $(٣ ، ٦ ، ٣)$ والتى جميع إحداثياتها موجبة.

∴ إحداثيات المركز موجبة وهى (نق ، نق ، نق)

، ∵ أ نقطة تماس الكرة مع المستوى س ع

∴ أ (نق ، ٠ ، نق)

، ∵ $\overline{أء}$ قطر فى الكرة

١١

نفرض أن المعادلة :

$س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + حـ = ٠$

١٣

∵ الكرة تمس المستوى س ع ونصف قطرها ٢

١٦

① (ب) ② (ب) ③ (جـ) ④ (د)

س = ١٠ ، ص = ٥ ، ع = ٤

∴ ب (١٠ ، ٥ ، ٤)

٥

إذا كانت $(\frac{أ}{٢})^{٢} + (\frac{ب}{٢})^{٢} + (\frac{حـ}{٢})^{٢} - ء > $ صفر

أي أن : أ^{٢} + ب^{٢} + حـ^{٢} − ٤ء > ٠

٦

م$_{١}$ (٢ ، −٤ ، ٢) ، نق$_{١}$ = ١

، م$_{٢}$ (−٤ ، ٤ ، ٢) ، نق$_{٢}$ = ٢

∴ م$_{١}$م$_{٢}$ = $\sqrt{٦^{٢} + (-٨)^{٢} + ٠^{٢}}$ = ١٠ وحدات.

∵ نق$_{١}$ + نق$_{٢}$ < م$_{١}$م$_{٢}$

∴ الكرتان متباعدتان أي غير متقاطعتين.

٨

① مركزها (٠ ، ٠ ، ٣) أو (٠ ، ٠ ، −٣) ، نق = ٢

المعادلة : س^{٢} + ص^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٤

أو س^{٢} + ص^{٢} + (ع + ٣)^{٢} = ٤

② النقطة على المحور س

∴ تمس المستوى ص ع ∴ نق = ٣

∴ المعادلة : (س − ٣)^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ٩

③ نق = ٣

∴ المعادلة :

(س + ٣)^{٢} + (ص − ٢)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٩

④ ∴ نق = |−٣| = ٣

المعادلة : (س + ٣)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} + (ع − ٥)^{٢} = ٩

⑤ نق = |٤ − ٣| = ١

المعادلة : (س − ٣)^{٢} + (ص + ٢)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ١

من (١) ، (٢) ∴ ل = ١٧ ، ... = ١٩

∴ المعادلة :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٥٤ س − ٨ ص + ٤ ع ...

⑦ نفرض أن معادلة الكرة هي

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + حـ = ٠

(٤ ، ٠ ، ٠) ∈ للكرة

١٦ + ٨ ل + ٠ + ٠ + ٠ + حـ = ٠

∴ ل = $\frac{-١}{٨}$ (حـ + ١٦)

(٠ ، ٤ ، ٠) ∈ للكرة ، (٠ ، ٠ ، ٤) ∈ للكرة

∴ ك = $\frac{-١}{٨}$ (حـ + ١٦) ، ن = $\frac{-١}{٨}$ (حـ + ١٦)

∴ ل = ك = ن = $\frac{-١}{٨}$ (حـ + ١٦)

ل^{٢} + ك^{٢} + ن^{٢} − حـ = نق^{٢}

∴ ٣ ل^{٢} − حـ = نق^{٢}

ويصنعوا مثلث متساوي الأضلاع ...

∴ نصف قطر الدائرة الخارجة ...

مركزها (...) = $(\frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣})$

∴ المعادلة $(س - \frac{٤}{٣})^{٢} + (ص - \frac{٤}{٣})^{٢} + (ع - \frac{٤}{٣})^{٢} = \frac{٣٢}{٣}$

⑧ الكرة تمس مستويات الإحداثيات

س ع ، س ص ، ص ع

∴ مركز الكرة هو (± نق ، ± نق ، ± نق)

، ∵ الكرة تمر بالنقطة ء (٣ ، ٦ ، ٣) والتي جميع إحداثياتها موجبة.

∴ إحداثيات المركز موجبة وهي (نق ، نق ، نق)

، ∵ ء نقطة تماس الكرة مع المستوى س ع

، ∵ ءَ قطر في الكرة

∴ منتصف ءَ = مركز الكرة

∴ $(\frac{نق + ٣}{٢} ، \frac{٦ + ٠}{٢} ، \frac{نق + ٣}{٢})$ = (نق ، نق ، نق)

∴ نق = ٣ ، إحداثيات المركز (٣ ، ٣ ، ٣)

∴ معادلة الكرة هي :

(س − ٣)^{٢} + (ص − ٣)^{٢} + (ع − ٣)^{٢} = ٩

٩

نوجد نقط تقاطع المحور س مع الكرة

المحور س معادلته ص = ٠ ، ع = ٠

من المعادلة :

(س − ٢)^{٢} + ٩ + ١ = ١٤ (س − ٢)^{٢} = ٤

س − ٢ = ± ٢ س = ٠ أ، ٤

∴ النقط هي أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (٤ ، ٠ ، ٠)

∴ أب = ٤ وحدة طول.

١٠

نفرض المركز هو (٠ ، ب ، ٠)

∴ المركز يُبعد مسافات متساوية عن النقط المعطاة

∴ $\sqrt{١^{٢} + (٣ - ب)^{٢} + ٢^{٢}}$

= $\sqrt{(-٢)^{٢} + (٤ - ب)^{٢} + ٢^{٢}}$

٥ + (٣ − ب)^{٢} = ٨ + (٤ − ب)^{٢}

٥ + ٩ − ٦ب + $\cancel{ب^{٢}}$ = ٨ + ١٦ − ٨ب + $\cancel{ب^{٢}}$

٢ب = ١٠ ∴ ب = ٥

∴ المركز (٠ ، ٥ ، ٠)

نق = $\sqrt{١^{٢} + (-٢)^{٢} + ٢^{٢}}$ = ٣

المعادلة : س^{٢} + (ص − ٥)^{٢} + ع^{٢} = ٩

١١

نفرض أن المعادلة :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ٢ ل س + ٢ ك ص + ٢ ن ع + حـ = ٠

∴ المركز = (−ل ، ٠ ، −ن)

حيث ك = ٠ «يقع في المستوى س ع»

، ∵ أ (٠ ، ٨ ، ٠) ∈ للكرة

٦٤ + حـ = ٠ حـ = −٦٤

، حـ (٠ ، ١٢ ، ٤) ∈ للكرة

٠ + ١٤٤ + ١٦ + ٨ ن − ٦٤ = ٠ ∴ ن = −١٢

، ب (٤ ، ٦ ، ٢) ∈ للكرة

١٦ + ٣٦ + ٤ + ٨ ل + ٤ ن − ٦٤ = ٠

٢ ل + ن = ٢

∴ ٢ ل = ١٤ ∴ ل = ٧

∴ المعادلة هي :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} + ١٤ س − ٢٤ ع − ٦٤ = ٠

١٢

نوجد نقط تقاطع المحور س مع الكرة المحور س معادلته ص = ٠ ، ع = ٠

من المعادلة (س − ٣)^{٢} + ١٦ + ١٤٤ = ١٦٩

∴ س − ٣ = ± ٣ ∴ س = ٠ أ، س = ٦

∴ النقط هي أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، ب (٦ ، ٠ ، ٠)

وبالمثل نوجد نقط تقاطع المحور ص مع الكرة بوضع س = ٠ ، ع = ٠

∴ ٩ + (ص + ٤)^{٢} + ١٤٤ = ١٦٩

∴ ص + ٤ = ± ٤ ∴ ص = ٠ أ، ص = −٨

∴ النقط هي أ (٠ ، ٠ ، ٠) ، حـ (٠ ، −٨ ، ٠)

∴ النقط الثلاث أ ، ب ، حـ تصنع مثلث قائم رأسه أ (٠ ، ٠ ، ٠) ومركز المقطع منتصف بحـ = (٣ ، −٤ ، ٠) ونصف قطره = ٥ وحدة طول.

∴ مساحة المقطع = π نق^{٢} = ٢٥ π وحدة مربعة.

١٣

∵ الكرة تمس المستوى س ع ونصف قطرها ٣

|م + ١| = ٣

∴ م + ١ = ٣ ∴ م = ٢

أ، م + ١ = −٣ ∴ م = −٤

∵ الكرة تمس المستوى ص ع ونصف قطرها ٣

∴ |ل − ٢| = ٣

∴ ل − ٢ = ٣ ومنها ل = ٥ أو ل − ٢ = −٣

ومنها ل = −١

١٤

∵ الكرة تمس الأجزاء الموجبة من المحاور الثلاثة

∴ مركز الكرة هو (أ ، أ ، أ) حيث أ ∈ ح$^{+}$

، بعد المركز عن أي محور = نق

∴ $\sqrt{أ^{٢} + أ^{٢}} = ٤\sqrt{٢}$

∴ $\sqrt{٢}$ أ = ٤$\sqrt{٢}$ ∴ أ = ٤

∴ معادلة الكرة هي :

(س − ٤)^{٢} + (ص − ٤)^{٢} + (ع − ٤)^{٢} = ٣٢

١٥

∵ الكرة تمس محاور الإحداثيات الثلاثة

|أ| = ٢$\sqrt{٢}$ ∴ أ = ± ٢$\sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الكرة = بعد المركز عن أي محور

= $\sqrt{(٢\sqrt{٢})^{٢} + (٢\sqrt{٢})^{٢}}$ = ٤ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هي :

$(س - ٢\sqrt{٢})^{٢} + (ص - ٢\sqrt{٢})^{٢} + (ع - ٢\sqrt{٢})^{٢} = ١٦$

أ،

$(س + ٢\sqrt{٢})^{٢} + (ص - ٢\sqrt{٢})^{٢} + (ع - ٢\sqrt{٢})^{٢} = ١٦$

١٦

① (ب) ② (ب) ③ (حـ) ④ (د)

⑤ (د) ⑥ (أ) ⑦ (حـ) ⑧ (ب)

⑨ (ب) ⑩ (حـ)

إرشادات لحل تمارين ١٦ :

① ∵ الكرة تمس محوري الإحداثيات س ، ص

∴ $\sqrt{(م - ١)^{٢} + (٥)^{٢}} = \sqrt{(٣)^{٢} + (٥)^{٢}}$

∴ (م − ١)^{٢} = (٣)^{٢} = ٩

∴ م − ١ = ± ٣ ∴ م = ١ ± ٣

∴ م = ٤ أ، −٢

∴ مركز الكرة هي (٣ ، ٣ ، ٥) أ، (٣ ، −٣ ، ٥)

، نق = $\sqrt{(٣)^{٢} + (٥)^{٢}} = \sqrt{٣٤}$

∴ معادلة الكرة هي :

(س − ٣)^{٢} + (ص ± ٣)^{٢} + (ع − ٥)^{٢} = ٣٤

② لكي تكون أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليس على استقامة واحدة فإنهم يقعوا جميعهم على أكبر دائرة في الكرة ويصنعوا مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه

= $\sqrt{(٠ - ٥)^{٢} + (٠ - ٠)^{٢} + (٥ - ٠)^{٢}} = ٥\sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الدائرة الخارجة = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢ جا ٦٠} = \frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$

③ لكي تكون أصغر كرة تمر بثلاث نقط ليس على استقامة واحدة فإنهم يقعوا جميعهم على أكبر دائرة في الكرة ويصنعوا مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه

= $\sqrt{(٥ - ٠)^{٢} + (٥ - ٥)^{٢} + (٠ - ٥)^{٢}} = ٥\sqrt{٢}$

∴ نصف قطر الدائرة الخارجة = $\frac{٥\sqrt{٢}}{٢ جا ٦٠} = \frac{٥\sqrt{٦}}{٣}$

④ ∵ المحاور س ، ص ، ع تقسم الفراغ إلى ٨ أثمان

∴ عدد الكرات التي تمس محاور الإحداثيات الثلاثة = ٨ كرات.

⑤ ∵ الكرة تمس مستويات الإحداثيات ، نق = ٨ وحدات

∴ مركز الكرة = (٨ ، ٨ ، ٨) حيث إن إحداثيات المركز موجبة

∴ معادلة الكرة هى :

$(س - ٨)^{٢} + (ص - ٨)^{٢} + (ع - ٨)^{٢} = ٦٤$

⑥ ∵ الكرة تمس محاور الإحداثيات الموجبة

، نق = ٨ وحدات

∴ مركز الكرة = $\left(\frac{٨}{\sqrt{٢}} ، \frac{٨}{\sqrt{٢}} ، \frac{٨}{\sqrt{٢}}\right)$

$= (٤\sqrt{٢} ، ٤\sqrt{٢} ، ٤\sqrt{٢})$

∴ معادلة الكرة هى $(س - ٤\sqrt{٢})^{٢}$

$+ (ص - ٤\sqrt{٢})^{٢} + (ع - ٤\sqrt{٢})^{٢} = ٦٤$

⑦ ∵ الكرة تمس جميع أوجه المكعب

∴ طول قطر الكرة = طول ضلع المكعب = ١٠ سم

∴ نق = ٥ سم

، ∵ أحد رؤوس المكعب هى نقطة الأصل

∴ الكرة تمس مستويات الإحداثيات

∴ مركز الكرة هى (٥ ، ٥ ، ٥) حيث إن إحداثيات المركز موجبة

∴ معادلة الكرة $(س - ٥)^{٢} + (ص - ٥)^{٢}$

$+ (ع - ٥)^{٢} = ٢٥$

أى أن $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} - ١٠ س - ١٠ ص$

$- ١٠ ع + ٥٠ = ٠$

⑧ ∵ الكرة تمر برؤوس المكعب

∴ طول قطر الكرة = طول قطر المكعب = $١٢\sqrt{٣}$

∴ نق = $٦\sqrt{٣}$

∴ معادلة الكرة هى $س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} = ١٠٨$

⑨ ∵ مركز الكرة قبل الانتقال هو (٢ ، −١ ، ٣)

، ∵ الانتقال = (٣ ، ٠ ، ٠)

∴ مركز الكرة بعد الانتقال = (٥ ، −١ ، ٣)

∴ معادلة الكرة بعد الانتقال هى

$(س - ٥)^{٢} + (ص + ١)^{٢} + (ع - ٣)^{٢} = ٩$

⑩ لإيجاد نقط تقاطع الكرة مع محور السينات نضع ص = ٠ ، ع = ٠

∴ $(س - ١)^{٢} + ٤ + ١ = ٦$

∴ $(س - ١)^{٢} = ١$

∴ س − ١ = ± ١

∴ س = ٢ أ، صفر

، لإيجاد نقط تقاطع الكرة مع محور الصادات نضع س = ٠ ، ع = ٠

∴ $١ + (ص - ٢)^{٢} + ١ = ٦$

∴ $(ص - ٢)^{٢} = ٥$

∴ ص − ٢ = ± ٢

∴ ص = ٤ أ، صفر

∴ نقط التقاطع مع محورى الإحداثيات س ، ص هى :

(٠ ، ٠ ، ٠) ، (٢ ، ٠ ، ٠) ، (٠ ، ٤ ، ٠)

∴ مساحة المثلث = $\frac{١}{٢} × ٢ × ٤ = ٤$ وحدة مربعة.

حلول تمارين 2

١

$-\overleftarrow{س} ، -\overleftarrow{ص} ، -\overleftarrow{ع}$

٢

① $\|\overleftarrow{أ}\| = \sqrt{٢^{٢} + (-١)^{٢} + ٠^{٢}} = \sqrt{٥}$

② $\|\overleftarrow{أ}\| = \sqrt{١^{٢} + ٢^{٢} + (-٢)^{٢}} = ٣$

③ $\|\overleftarrow{ب}\| = \sqrt{٥^{٢} + (-٤)^{٢} + (٢\sqrt{٢})^{٢}} = ٧$

④ $\|\overleftarrow{ح}\| = \sqrt{٠^{٢} + ٠^{٢} + ١^{٢}} = ١$

⑤ $\|\overleftarrow{ب}\| = \sqrt{٣^{٢} + ٤^{٢} + ٠^{٢}} = ٥$

٣

① $\overleftarrow{أ} - \frac{١}{٢}\overleftarrow{ب} = -٣\overleftarrow{س} - ٧\overleftarrow{ص} - ٣\overleftarrow{ع}$

② $٣\overleftarrow{ب} - ٢\overleftarrow{أ} = ٦\overleftarrow{س} + ٢٢\overleftarrow{ص} + ٢٢\overleftarrow{ع}$

③ $\overleftarrow{أ} - ٣\overleftarrow{ب} = -٣\overleftarrow{س} - ١٧\overleftarrow{ص} - ٢٣\overleftarrow{ع}$

④ $٢\overleftarrow{أ} + ٣\overleftarrow{ب} = -٦\overleftarrow{س} + ٢\overleftarrow{ص} + ٢٦\overleftarrow{ع}$

٤

① $\overleftarrow{أ} + \overleftarrow{ب} = (٦ ، -٥ ، ١)$

② $٣\overleftarrow{أ} - \frac{١}{٢}\overleftarrow{ح} = (٨ ، -٩ ، ٢)$

③ $\frac{٣}{٢}\overleftarrow{ب} + \frac{٢}{٣}\overleftarrow{ح} = (٢ ، -٣ ، ٢)$

٥

① $٥\overleftarrow{ح} - ٢\overleftarrow{ء} = (١٠ ، -١٥ ، ٥) + (٠ ، -٤ ، ٤)$

$= (١٠ ، -١٩ ، ٩)$

② $٣\overleftarrow{أ} - ٤\overleftarrow{ء} = \overleftarrow{ح}$ ∴ $٣\overleftarrow{أ} = \overleftarrow{ح} + ٤\overleftarrow{ء}$

∴ $\overleftarrow{أ} = \frac{١}{٣}\overleftarrow{ح} + \frac{٤}{٣}\overleftarrow{ء}$

$= \left(\frac{٢}{٣} ، -١ ، \frac{١}{٣}\right) + \left(٠ ، \frac{٨}{٣} ، \frac{-٨}{٣}\right)$

$= \left(\frac{٢}{٣} ، \frac{٥}{٣} ، \frac{-٧}{٣}\right)$

٦

∴ $٢\overleftarrow{أ} = ٢\overleftarrow{ح} - ٣\overleftarrow{ء} + ٢\overleftarrow{هـ}$

$= (٨ ، -٢ ، ٤) + (٩ ، -١٢ ، -١٥)$

$+ (-١٠ ، ٢ ، ٦) = (٧ ، -١٢ ، -٥)$

∴ $\overleftarrow{أ} = \left(\frac{٧}{٢} ، -٦ ، \frac{-٥}{٢}\right)$

٧

① (جـ)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (أ)
⑤ (ب)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (د)
⑰ (جـ)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (د)
㉑ (د)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (جـ)
㉕ (د)	㉖ (جـ)	㉗ (أ)	㉘ (جـ)
㉙ (ب)	㉚ (جـ)	㉛ (ب)	㉜ (جـ)
㉝ (ب)	㉞ (ب)	㉟ (جـ)	㊱ (جـ)
㊲ (جـ)	㊳ (جـ)	㊴ (ب)	㊵ (أ)
㊶ (د)	㊷ (جـ)	㊸ (د)	

٨

٢ل + ٢ = −٤ ∴ ٢ل = −٦ منها ل = −٢

، $٩ = ن^{٢}$ ∴ ن = ± ٣

، م − ٤ = ١٤ ∴ م = ١٨

٩

ل − ٤ = ٥ ، ل = ٩

، $م^{٢} - ٣ = ١$ ∴ $م^{٢} = ٤$

ومنها م = ± ٢ ، $١ = ن^{٢}$

∴ ن = ± ١

١٠

٢س + ١ = −١ ∴ ٢س = −٢

ومنها س = −١

، $٥ = ص^{٢} - ٤$

$ص^{٢} = ٩$ ومنها ص = ± ٣

، ك + ٤ = س + ١ ومنها ك = −٤

١١

① (٦ + ٣ن ، ٢م − ٦ ، ٢ل + ١٢) = (٣ ، ٢ ، ٤)

٦ + ٣ن = ٣ ∴ ٣ن = −٣

ومنها ن = −١

٢م − ٦ = ٢

∴ ٢م = ٨ ومنها م = ٤ ، ٢ل + ١٢ = ٤

٢ل = −٨ ومنها ل = −٤

② −٦ل = ١٢ ∴ ل = −٢ ، ل م = ١٠

∴ −٢م = ١٠ ∴ م = −٥ ، ٢ل ن = −٤

∴ −٤ن = −٤ ∴ ن = ١

③ −٢ل − ٣م + ٠ = −٨ (١)

٢ل + ٣م = ٨

٢ل + م + ٠ = ٥ ٣ل + م = ٥ (٢)

ل + ٢م + ن = ٨ (٣)

بحل (١) ، (٢) ينتج أن ل = ١ ، م = ٢

بالتعويض فى (٣) ينتج أن : ن = ٣

١٢

١٥

$\overleftarrow{أب} = \overleftarrow{ب} - \overleftarrow{أ} = (٣ ، ١ ، -٧)$

$\|\overleftarrow{أب}\| = \sqrt{٩ + ١ + ٤٩}$ …

١٦

∴ ٤ ك … $= \frac{٣}{٤}$

٢٠

① $٢\overleftarrow{أ} - ٣\overleftarrow{ب} = (٤ ، -٦ ، ٢) + (٣ ، ٦ ، ٠)$

$= (٧ ، ٠ ، ٢)$

② $\|\overleftarrow{أ} +$ …

١٤

$\|٣\overleftarrow{أ}\| = \|-٥\overleftarrow{ب}\| = ١٥$

$٣\|\overleftarrow{أ}\| = ٥\|\overleftarrow{ب}\| = ١٥$

$\|\overleftarrow{أ}\| = ٥ ، \|\overleftarrow{ب}\| = ٣$

$\left(\frac{١}{…} ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right) = \left(\frac{٥}{\sqrt{٢}} ، \frac{-٥}{٢} ، \frac{٥}{٢}\right)$

$\left(… ، \frac{١}{٢} ، \frac{١}{٢}\right) = \left(\frac{٣}{\sqrt{٢}} ، \frac{-٣}{٢} ، \frac{٣}{٢}\right)$

∴ معادلة الكرة هي …

(٩) ∵ مركز الكرة قبل الانتقال هو (…

∵ الانتقال = (٢ ، ٠ ، ٠)

∴ مركز الكرة بعد الانتقال = (٥ ، -١ ، …

∴ معادلة الكرة بعد الانتقال هي

$(س - ٥)^٢ + (ص + ١)^٢ + (ع - ٣)^٢ = ٩$

(١٠) لإيجاد نقط تقاطع الكرة مع محور السينات نضع ص = ٠ ، ع = ٠

∴ $(س - ١)^٢ + ٤ + ١ = ٦$

(١) $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{…^٢ + (-١)^٢ + ٠^٢} = \sqrt{٥}$

$\sqrt{١^٢ + ٢^٢ + (-٢)^٢} = ٣$

$\sqrt{…^٢ + (-٤)^٢ + (٢\sqrt{٢})^٢} = ٧$

$\sqrt{…^٢ + ١^٢} = ١$

$\sqrt{… + ٠^٢} = ٥$

---

(١) … $- ٧\overrightarrow{ص} - ٣\overrightarrow{ع}$

(٢) ٣ … $\overrightarrow{س} + ٢٢\overrightarrow{ص} + ٢٢\overrightarrow{ع}$

(٣) $\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب} = -٣\overrightarrow{س} - ١٧\overrightarrow{ص} - ٢٣\overrightarrow{ع}$

(٤) $٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب} = -٦\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص} + ٢٦\overrightarrow{ع}$

∴ … = (… ، -٦ ، …)

٧

① (جـ)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (أ)
⑤ (ب)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (أ)	⑩ (أ)	⑪ (ب)	⑫ (ب)
⑬ (جـ)	⑭ (ب)	⑮ (ب)	⑯ (د)
⑰ (جـ)	⑱ (جـ)	⑲ (أ)	⑳ (د)
㉑ (د)	㉒ (ب)	㉓ (جـ)	㉔ (جـ)
㉕ (د)	㉖ (جـ)	㉗ (أ)	㉘ (جـ)
㉙ (ب)	㉚ (جـ)	㉛ (ب)	㉜ (جـ)
㉝ (ب)	㉞ (ب)	㉟ (جـ)	㊱ (جـ)
㊲ (جـ)	㊳ (جـ)	㊴ (ب)	㊵ (أ)
㊶ (د)	㊷ (جـ)	㊸ (د)	

١١

(١) (٦ + ٢ن ، ٢م ، … ٢ل + ١٢) = (٢ ، … ، …)

٦ + ٢ن = ٢ ∴ ٢ن = …

ومنها ن = -١٠

٢م - ٦ = ٢

∴ ٢م = ٨ ومنها م = ٤ ، ٢ل + ١٢ = ٤

٢ل = -٨ ومنها ل = -٤

(٢) -٦ل = ١٢ ∴ ل = -٢ ، ل م = ١٠

∴ -٢م = ١٠ ∴ م = -٥ ، ٢ ل ن = -٤

∴ -٤ن = -٤ ∴ ن = ١

(٣) -٢ل - ٣م + ٠ = -٨

٢ل + ٣م = ٨ (١)

٢ل + م + ٠ = ٥ ، ٢ل + م = ٥ (٢)

ل + ٢م + ن = ٨ (٣)

بحل (١) ، (٢) ينتج أن ل = ١ ، م = ٢

بالتعويض في (٣) ينتج أن : ن = ٣

١٢

(١) $\overrightarrow{ب} - \overrightarrow{جـ} = -١٠\overrightarrow{س} - ١٤\overrightarrow{ص} - ٥\overrightarrow{ع}$

، $٢(\overrightarrow{ب} + \overrightarrow{جـ}) = ٢(٦\overrightarrow{س} + ٢٤\overrightarrow{ص} + ٣\overrightarrow{ع})$

$= ١٢\overrightarrow{س} + ٤٨\overrightarrow{ص} + ٦\overrightarrow{ع}$

(٢) نفرض أن $\overrightarrow{جـ} = ك\overrightarrow{أ} + م\overrightarrow{ب}$

(٨ ، ١٩ ، ٤) = ك(٤ ، ٣ ، ٢) + م(-٢ ، ٥ ، -١)

٤ك - ٢م = ٨ (١)

٣ك + ٥م = ١٩ (٢)

٢ك - م = ٤ (٣)

بحل (١) ، (٢) : ك = ٣ ، م = ٢ (تحقق المعادلة ٣)

∴ $\overrightarrow{جـ} = ٣\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{ب}$

١٣

$\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{(-٣)^٢ + ٢^٢ + ١^٢} = \sqrt{١٤}$

$\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|(-١ ، ٥ ، ١)\|$

$= \sqrt{(-١)^٢ + ٥^٢ + ١^٢} = ٣\sqrt{٣}$

١٤

$٣(\overrightarrow{أ} - \overrightarrow{ب}) = ٧\overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{أ}$

$٣\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب} = ٧\overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{أ}$

∴ $٥\overrightarrow{أ} = ١٠\overrightarrow{ب}$

$\overrightarrow{ب} = \frac{١}{٢}\overrightarrow{أ} = \frac{١}{٢}(٤ ، -٦ ، ٢) = (٢ ، -٣ ، ١)$

∴ $\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٢^٢ + (-٣)^٢ + (١)^٢} = \sqrt{١٤}$

١٥

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٣ ، ١ ، -٧)$

$\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٩ + ١ + ٤٩} = \sqrt{٥٩}$

١٦

∴ $٤ك\|\overrightarrow{أ}\| = ٣\|\overrightarrow{أ}\|$ ∴ ٤ك = ٣ منها $ك = \frac{٣}{٤}$

١٧

∴ $٨\|\overrightarrow{أ}\| = ٥|ك|\|\overrightarrow{أ}\|$

$٨ = ٥|ك|$ $|ك| = \frac{٨}{٥}$ منها $ك = \pm\frac{٨}{٥}$

١٨

الطرف الأيمن = $\sqrt{ك^٢ + ٠ + ٠} = |ك|$

الطرف الأيسر = $|ك|\sqrt{١^٢ + ٠ + ٠} = |ك|$

∴ الطرفان متساويان.

حل اخر : ∵ $\overrightarrow{أ} = (ك ، ٠ ، ٠)$

∴ $\overrightarrow{أ} = ك(١ ، ٠ ، ٠)$ ∴ $\overrightarrow{أ} = ك\overrightarrow{س}$

∴ $\|\overrightarrow{أ}\| = |ك|\|\overrightarrow{س}\|$

١٩

(١) $\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{جـ} = (١٧ ، ٠ ، -٢)$

$\|\overrightarrow{أ} + ٢\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{٢٩٣}$

(٢) $٥\overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{أ} = (-١ ، ١٤ ، ٢٢)$

$\|٥\overrightarrow{ب} + ٣\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{٦٨١}$

(٣) $\overrightarrow{أ} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب} = (٢ ، ٠ ، ٥)$

$\|\overrightarrow{أ} + \frac{١}{٢}\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٢٩}$

(٤) $\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{جـ} = (-١٣ ، ٠ ، ١٢)$

$\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب} - ٢\overrightarrow{جـ}\| = \sqrt{٣١٣}$

(٥) $٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب} - ٤\overrightarrow{جـ} = (-٢٨ ، ٤ ، ٢٦)$

$\|٢\overrightarrow{أ} + ٣\overrightarrow{ب} - ٤\overrightarrow{جـ}\| = ٦\sqrt{٤١}$

٢٠

(١) $٢\overrightarrow{أ} - ٣\overrightarrow{ب} = (٤ ، -٦ ، ٢) + (٣ ، ٦ ، ٠)$

$= (٧ ، ٠ ، ٢)$

(٢) $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| = \|(١ ، -٥ ، ١)\| = ٣\sqrt{٣} \simeq ٥,١٩٦$

$\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{١٤} + \sqrt{٥} \simeq ٥,٩٨$

نلاحظ أن : $\|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\| < \|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\|$

٢١

$\|\overrightarrow{أ}\| + \|\overrightarrow{ب}\| > \|\overrightarrow{أ} + \overrightarrow{ب}\|$

٢٢

(١) $\|\overrightarrow{أ}\| = ١٢$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{أ} = \frac{\overrightarrow{أ}}{\|\overrightarrow{أ}\|} = (\frac{٢}{٣} ، -\frac{١}{٣} ، \frac{-٢}{٣})$

(٢) $\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٦}$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{ب} = (\frac{١}{\sqrt{٦}} ، \frac{-٢}{\sqrt{٦}} ، \frac{-١}{\sqrt{٦}})$

(٣) $\|\overrightarrow{جـ}\| = ٥$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{جـ} = (\frac{٣}{٥} ، ٠ ، \frac{-٤}{٥})$

(٤) $\|\overrightarrow{د}\| = \sqrt{١٤}$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{د} = (\frac{٢}{\sqrt{١٤}} ، \frac{-١}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٤}})$

(٥) $\|\overrightarrow{هـ}\| = ١٣$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{هـ} = (\frac{١٢}{١٣} ، \frac{٥}{١٣} ، ٠)$

(٦) $\|\overrightarrow{م}\| = ٣$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{م} = (\frac{٢}{٣} ، \frac{٢}{٣} ، \frac{-١}{٣})$

٢٣

(١) $\|\overrightarrow{أ}\| = \sqrt{١٤}$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{أ} = (\frac{-١}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٢}{\sqrt{١٤}})$

(٢) $\|\overrightarrow{ب}\| = \sqrt{٢١}$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{ب} = (\frac{٤}{\sqrt{٢١}} ، \frac{٢}{\sqrt{٢١}} ، \frac{-١}{\sqrt{٢١}})$

(٣) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ} = (٥ ، -١ ، -٣)$

$\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{٣٥}$

∴ $\overrightarrow{ى}_{أب} = (\frac{٥}{\sqrt{٣٥}} ، \frac{-١}{\sqrt{٣٥}} ، \frac{-٣}{\sqrt{٣٥}})$

(٤) $\overrightarrow{ى}_{بأ} = (\frac{-٥}{\sqrt{٣٥}} ، \frac{١}{\sqrt{٣٥}} ، \frac{٣}{\sqrt{٣٥}})$

٢٤

$\|٣\overrightarrow{أ}\| = \|-٥\overrightarrow{ب}\| = ١٥$

$٣\|\overrightarrow{أ}\| = ٥\|\overrightarrow{ب}\| = ١٥$

$\|\overrightarrow{أ}\| = ٥ ، \|\overrightarrow{ب}\| = ٣$

∴ $\overrightarrow{أ} = ٥(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٢}) = (\frac{٥}{\sqrt{٢}} ، \frac{-٥}{٢} ، \frac{٥}{٢})$

$\overrightarrow{ب} = ٣(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{-١}{٢} ، \frac{١}{٢}) = (\frac{٣}{\sqrt{٢}} ، \frac{-٣}{٢} ، \frac{٣}{٢})$

٢٥

$\sqrt{ك^٢ + (\frac{٢}{٣})^٢ + (\frac{٢}{٣})^٢} = ١$

$ك^٢ = ١ - (\frac{٤}{٩} + \frac{٤}{٩}) = \frac{١}{٩}$ ∴ $ك = \pm\frac{١}{٣}$

٢٦

(١) $(\frac{-٢\sqrt{٢}}{٥})^٢ + (\frac{٤}{٥})^٢ + (\frac{ن}{٥})^٢ = ١$

$\frac{٨}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥} + \frac{ن^٢}{٢٥} = ١$

$ن^٢ = ٢٥ - (٨ + ١٦) = ١$ ∴ ن = ±١

، ∵ $\overrightarrow{جـ} = \overrightarrow{ب} = \overrightarrow{ى}_{أ}$ ∴ ن = ١

∴ $\frac{-٢\sqrt{٢}}{٥}\overrightarrow{س} + \frac{٤}{٥}\overrightarrow{ص} + \frac{١}{٥}\overrightarrow{ع}$

$= ل\overrightarrow{س} + ٤م\overrightarrow{ص} + \frac{١}{٥}\overrightarrow{ع}$

∴ $ل = \frac{-٢\sqrt{٢}}{٥}$ ، $٤م = \frac{٤}{٥}$ ∴ $م = \frac{١}{٥}$

(٢) $\overrightarrow{أ} = \|\overrightarrow{أ}\|\overrightarrow{ى}_{أ} = ١٥(\frac{-٢\sqrt{٢}}{٥} ، \frac{٤}{٥} ، \frac{١}{٥})$

$= (-٦\sqrt{٢} ، ١٢ ، ٣)$

٢٧

(١) $\|\overrightarrow{أ}\| = ٦$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{أ} = (\frac{٥}{٦} ، \frac{-٢}{٦} ، \frac{\sqrt{٧}}{٦})$

(٢) $\|\overrightarrow{ب}\| = ٤$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{ب} = (\frac{-١}{٢} ، \frac{\sqrt{٢}}{٢} ، \frac{١}{٢})$

(٣) $\|\overrightarrow{جـ}\| = ٥$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{جـ} = (\frac{٤}{٥} ، ٠ ، \frac{-٣}{٥})$

(٤) $\|\overrightarrow{د}\| = ١٣$ ∴ $\overrightarrow{ى}_{د} = (٠ ، \frac{-٥}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣})$

⑤ $\|\overrightarrow{\text{هـ}}\| = \sqrt{٣}$ $\therefore \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{هـ}} = \left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

⑥ $\|\overrightarrow{\text{م}}\| = ١٣$ $\therefore \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{م}} = \left(\frac{٣}{١٣} ، \frac{١٢}{١٣} ، \frac{٤}{١٣}\right)$

١٨

① $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ١٠\sqrt{٢}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{أ}} = \left(\frac{٨}{١٠\sqrt{٢}} ، \frac{٦}{١٠\sqrt{٢}} ، \frac{-١٠}{١٠\sqrt{٢}}\right)$

$\therefore \text{جتا}\,\theta_{\text{س}} = \frac{٨}{١٠\sqrt{٢}}$ $\therefore \theta_{\text{س}} \simeq ٥٥° \ ٤٣'$

، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} = \frac{٦}{١٠\sqrt{٢}}$ $\therefore \theta_{\text{ص}} \simeq ٦٤° \ ٥٤'$

، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} = \frac{-١٠}{١٠\sqrt{٢}}$ $\therefore \theta_{\text{ع}} = ١٣٥°$

② $\|\overrightarrow{\text{حـ}}\| = ٧$

$\therefore \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{حـ}} = \left(\frac{-٢}{٧} ، \frac{٣}{٧} ، \frac{-٦}{٧}\right)$

$\therefore \text{جتا}\,\theta_{\text{س}} = \frac{-٢}{٧}$ $\therefore \theta_{\text{س}} \simeq ١٠٦° \ ٤٦'$

، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} = \frac{٣}{٧}$ $\therefore \theta_{\text{ص}} \simeq ٦٤° \ ٤٧'$

، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} = \frac{-٦}{٧}$ $\therefore \theta_{\text{ع}} \simeq ١٤٩°$

③ $\|\overrightarrow{\text{ء}}\| = ٥\sqrt{٣}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{ء}} = \left(\frac{٥}{٥\sqrt{٣}} ، \frac{-٥}{٥\sqrt{٣}} ، \frac{٥}{٥\sqrt{٣}}\right)$

$\therefore \text{جتا}\,\theta_{\text{س}} = \text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} = \frac{٥}{٥\sqrt{٣}}$

$\therefore \theta_{\text{س}} = \theta_{\text{ع}} \simeq ٥٤° \ ٤٤'$

، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} = \frac{-٥}{٥\sqrt{٣}}$ $\therefore \theta_{\text{ص}} \simeq ١٢٥° \ ١٦'$

④ $\|\overrightarrow{\text{هـ}}\| = ١$ $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{هـ}} = (٠ ، ٠ ، ١)$

$\therefore \text{جتا}\,\theta_{\text{س}} = \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} = ٠$

$\therefore \theta_{\text{س}} = \theta_{\text{ص}} = ٩٠°$

، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} = ١$ $\therefore \theta_{\text{ع}} = ٠$

⑤ $\|\overrightarrow{\text{م}}\| = \sqrt{٢}$ $\overrightarrow{\text{ى}}_{\text{م}} = \left(\frac{١}{\sqrt{٢}} ، \frac{١}{\sqrt{٢}} ، ٠\right)$

$\therefore \text{جتا}\,\theta_{\text{س}} = \text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

$\therefore \theta_{\text{س}} = \theta_{\text{ص}} = ٤٥°$

، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} = ٠$ $\therefore \theta_{\text{ع}} = ٩٠°$

٢٩

$\|\overrightarrow{\text{حـ}}\| = ٥\sqrt{٢}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{حـ}} = \left(\frac{٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{-٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}\right)$

$\therefore \text{جتا}\,\theta_{\text{س}} = \frac{٣}{٥\sqrt{٢}}$ $\therefore \theta_{\text{س}} \simeq ٦٤° \ ٥٤'$

، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ص}} = \frac{-٤}{٥\sqrt{٢}}$ $\therefore \theta_{\text{ص}} \simeq ١٢٤° \ ٢٧'$

، $\text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} = \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}$ $\therefore \theta_{\text{ع}} = ٤٥°$

٣٠

① $\text{جتا}^٢\,٦٠ + \text{جتا}^٢\,٨٠ + \text{جتا}^٢\,\theta = ١$

$\therefore \text{جتا}^٢\,\theta = ١ - \text{جتا}^٢\,٦٠ - \text{جتا}^٢\,٨٠ \simeq ٠{,}٧١٩٨٥$

$\text{جتا}\,\theta = \pm\sqrt{٠{,}٧١٩٨٥}$

، $\because \theta$ حادة $\therefore \theta \simeq ٣١° \ ٥٧'$

② $\overrightarrow{\text{أ}} = ١٣\ (\text{جتا}\,٦٠° ، \text{جتا}\,٨٠° ، \text{جتا}\,٣١° \ ٥٧')$

$\simeq \frac{١٣}{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٢{,}٢٦\,\overrightarrow{\text{ص}} + ١١{,}٠٣\,\overrightarrow{\text{ع}}$

٣١

المحور س $(٠° ، ٩٠° ، ٩٠°)$ ، $(١ ، ٠ ، ٠)$

المحور ص $(٩٠° ، ٠° ، ٩٠°)$ ، $(٠ ، ١ ، ٠)$

المحور ع $(٩٠° ، ٩٠° ، ٠°)$ ، $(٠ ، ٠ ، ١)$

٣٢

نفرض أن : $\theta_{\text{س}} = \theta_{\text{ص}} = \theta_{\text{ع}} = \theta$

$\therefore \text{جتا}^٢\,\theta + \text{جتا}^٢\,\theta + \text{جتا}^٢\,\theta = ١$

$\therefore \text{جتا}^٢\,\theta = \frac{١}{٣}$ $\therefore \text{جتا}\,\theta = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \frac{١}{\sqrt{٣}}$ ومنها $\theta = ٥٤° \ ٤٤'$

أ، $\text{جتا}\,\theta = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$ ومنها $\theta = ١٢٥° \ ١٦'$

وجيوب تمام الاتجاه هى $\left(\frac{\pm١}{\sqrt{٣}} ، \frac{\pm١}{\sqrt{٣}} ، \frac{\pm١}{\sqrt{٣}}\right)$

٣٣

زوايا الاتجاه $(٩٠° ، ١٥° ، ٧٥°)$ أ، $(٩٠° ، ١٥° ، ١٠٥°)$

٣٤

$\because ٣\,\text{جتا}^٢\,\theta = ١$ $\therefore \text{جتا}^٢\,\theta = \frac{١}{٣}$

$\therefore \text{جتا}\,\theta = \pm\frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = ٢١\sqrt{٣}\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

$= (٢١ ، ٢١ ، ٢١)$

أ، $\overrightarrow{\text{أ}} = ٢١\sqrt{٣}\left(\frac{-١}{\sqrt{٣}} ، \frac{-١}{\sqrt{٣}} ، \frac{-١}{\sqrt{٣}}\right)$

$= (-٢١ ، -٢١ ، -٢١)$

٣٥

$\because \text{جتا}^٢\,٣٠ + \text{جتا}^٢\,٦٠ + \text{جتا}^٢\,\theta_{\text{ع}} = ١$

$\text{جتا}^٢\,\theta_{\text{ع}} = ١ - \left(\frac{\sqrt{٣}}{٢}\right)^٢ - \left(\frac{١}{٢}\right)^٢ = ٠$

$\text{جتا}\,\theta_{\text{ع}} = ٠ \longrightarrow \theta = ٩٠°$

$\therefore$ يصنع زاوية قياسها $٩٠°$ مع الاتجاه الموجب للمحور ع

٣٦

بفرض أن $\overrightarrow{\text{أ}}$ متجه يصل بين النقطتين حـ ، ء موازيًا المستوى ص ع حيث حـ = $(\text{ك} ، \text{ص}_١ ، \text{ع}_١)$

، ء = $(\text{ك} ، \text{ص}_٢ ، \text{ع}_٢)$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{حـ ء}} = \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{حـ}} = (٠ ، \text{ص}_٢ - \text{ص}_١ ، \text{ع}_٢ - \text{ع}_١)$

أى أن $\overrightarrow{\text{أ}} = (٠ ، \text{ص} ، \text{ع})$ بصفة عامة

، المتجه $\overrightarrow{\text{أ}}$ عمودى على محور س أى $\theta_{\text{س}} = ٩٠°$

٣٧

$\because \text{جتا}^٢\,\theta_{\text{س}} + \text{جتا}^٢\,\theta_{\text{ص}} + \text{جتا}^٢\,\theta_{\text{ع}} = ١$

$\therefore ١ - \text{جا}^٢\,\theta_{\text{س}} + ١ - \text{جا}^٢\,\theta_{\text{ص}} + ١ - \text{جا}^٢\,\theta_{\text{ع}} = ١$

$\therefore \text{جا}^٢\,\theta_{\text{س}} + \text{جا}^٢\,\theta_{\text{ص}} + \text{جا}^٢\,\theta_{\text{ع}} = ٢$

٣٨

$\because \theta_{\text{س}} ، \theta_{\text{ص}} ، \theta_{\text{ع}}$ هى زوايا اتجاه لمتجه ما

$\therefore \text{جتا}^٢\,\theta_{\text{س}} + \text{جتا}^٢\,\theta_{\text{ص}} + \text{جتا}^٢\,\theta_{\text{ع}} = ١$

$\therefore \frac{١ + \text{جتا}\,٢\theta_{\text{س}}}{٢} + \frac{١ + \text{جتا}\,٢\theta_{\text{ص}}}{٢} + \frac{١ + \text{جتا}\,٢\theta_{\text{ع}}}{٢} = ١$

بالضرب × ٢

$\therefore ٣ + \text{جتا}\,٢\theta_{\text{س}} + \text{جتا}\,٢\theta_{\text{ص}} + \text{جتا}\,٢\theta_{\text{ع}} = ٢$

$\therefore \text{جتا}\,٢\theta_{\text{س}} + \text{جتا}\,٢\theta_{\text{ص}} + \text{جتا}\,٢\theta_{\text{ع}} + ١ = ٠$

٣٩

① $\because \overrightarrow{\text{و أ}} = (٥ ، ٥ ، ٥)$ $\therefore \|\overrightarrow{\text{و أ}}\| = ٥\sqrt{٣}$

$\therefore \overrightarrow{\text{ى}}_{\text{و أ}} = \left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

وهى جيوب تمام الاتجاه للمتجه $\overrightarrow{\text{ق}}$

② $\theta_{\text{س}} = \theta_{\text{ص}} = \theta_{\text{ع}} = \text{جتا}^{-١}\frac{١}{\sqrt{٣}} \simeq ٥٤° \ ٤٤'$

③ $\overrightarrow{\text{ق}} = ٢٥\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

$= \frac{٢٥}{\sqrt{٣}}\,\overrightarrow{\text{س}} + \frac{٢٥}{\sqrt{٣}}\,\overrightarrow{\text{ص}} + \frac{٢٥}{\sqrt{٣}}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

٤٠

① نفرض أن $\overrightarrow{\text{أ}}$ يمثل القطر تمثيلاً تامًا

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، ٤ ، ٥)$ $\therefore \|\overrightarrow{\text{أ}}\| = ٥\sqrt{٢}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} = \left(\frac{٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}\right)$

$\therefore \overrightarrow{\text{ق}} = ٢٠٠\left(\frac{٣}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} ، \frac{٥}{٥\sqrt{٢}}\right)$

$= ٦٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{س}} + ٨٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ص}} + ١٠٠\sqrt{٢}\,\overrightarrow{\text{ع}}$

، جتا θع = … ∴ θع ≈ ١١٩°

③ ‖أ‖ = ٥√٢

∴ ى_أ = (… / ٥√٢ ، … / ٥√٢ ، … / ٥√٢)

∴ جتا θس = جتا θع = … / ٥√٢

∴ θس = θع = ٤٥°

، جتا θص = … / ٥√٢ ∴ θص ≈ ١٣٥°

④ ‖أ‖ = ١ ى_أ = (٠ ، ٠ ، ١)

∴ جتا θس = جتا θص = ٠

∴ θس = θص = ٩٠°

، جتا θع = ١ ∴ θع = ٠

⑤ ‖أ‖ = √٢ ى_أ = (1/√٢ ، 1/√٢ ، ٠)

… جتا θ …

∴ θ حادة

② أ = ١٢ (جا ٦٠° ، جتا ٨٠ …

= ١٣/٢ س + ٢٫٢٦ ص + ٢٫٠٦ ع

٣١

المحور س (٠° ، ٩٠° ، ٩٠°) ، (١ ، ٠ ، ٠)

المحور ص (٩٠° ، ٠° ، ٩٠°) ، (٠ ، ١ ، ٠)

المحور ع (٩٠° ، ٩٠° ، ٠°) ، (٠ ، ٠ ، ١)

٣٢

نفرض أن : θس = θص = θع = θ

∴ جتا² θ + جتا² θ + جتا² θ = ١

∴ جتا² θ = 1/٣ ∴ جتا θ = ± 1/√٣

∴ جتا θ = 1/√٣ ومنها θ = ٥٤° ٤٤َ

= (… ، … ، …)

٣٥

∵ جتا² ٣٠ + جتا² ٦٠ + جتا² θع = ١

جتا² θع = ١ − (√٣/٢)² − (1/٢)² = ٠

جتا θع = ٠ ⟵ θ = ٩٠°

∴ يصنع زاوية قياسها ٩٠° مع الاتجاه الموجب للمحور ع

٣٦

بفرض أن أ متجه يصل بين النقطتين حـ ، ء موازيًا المستوى ص ع حيث حـ = (ك ، ص١ ، ع١)

، ء = (ك ، ص٢ ، ع٢)

∴ أ = حـء = ء − حـ = (٠ ، ص٢ − ص١ ، ع٢ − ع١)

أى أن أ = (٠ ، ص ، ع) بصفة عامة

، المتجه أ عمودى على محور س أى θس = ٩٠°

① ∵ و أ = (١ ، ١ ، ١) ∴ ‖و أ‖ = √٣

∴ ى = (1/√٣ ، 1/√٣ ، 1/√٣)

وهى جيوب تمام الاتجاه للمتجه ق

② θس = θص = θع = جتا⁻¹ 1/√٣ ≈ ٥٤° ٤٤َ

③ ق = ٢٥ (1/√٣ ، 1/√٣ ، 1/√٣)

= ٢٥/√٣ س + ٢٥/√٣ ص + ٢٥/√٣ ع

٤٠

① نفرض أن أ يمثل القطر تمثيلاً تامًا

∴ أ = (٣ ، ٤ ، ٥) ∴ ‖أ‖ = ٥√٢

∴ أ = (٣/٥√٢ ، ٤/٥√٢ ، ٥/٥√٢)

∴ ق = ٢٠٠ (٣/٥√٢ ، ٤/٥√٢ ، ٥/٥√٢)

= ٦٠√٢ س + ٨٠√٢ ص + ١٠٠√٢ ع

② θس = جتا⁻¹ ٣/٥√٢ ≈ ٥٤َ ٦٤°

θص = جتا⁻¹ ٤/٥√٢ ≈ ٤٣ ٥٥°

θع = جتا⁻¹ ٥/٥√٢ = ٤٥°

٤١

أ = (−٢ ، ٤ ، ٣) ∴ ‖أ‖ = √٢٩

ى_أ = (−٢/√٢٩ ، ٤/√٢٩ ، ٣/√٢٩)

∴ ق = ١٢√٢٩ (−٢/√٢٩ ، ٤/√٢٩ ، ٣/√٢٩)

= (−٢٤ ، ٤٨ ، ٣٦)

∴ قس = −٢٤ ، قص = ٤٨ ، قع = ٣٦

٤٢

أ = (٥ ، ١٢ ، ١٣) ∴ ‖أ‖ = ١٣√٢

∴ جيوب تمام المتجه و أ = ى_أ

= (٥/١٣√٢ ، ١٢/١٣√٢ ، ١٣/١٣√٢)

٤٣

∵ أب = ب − أ = (٢ ، ٠ ، ٠) − (٠ ، ١ ، ٢)

= (٢ ، −١ ، −٢)

∴ ‖أب‖ = ٣

، ق = ‖ق‖ × أب/‖أب‖ = ٢١ × (٢ ، −١ ، −٢)/٣

= (١٤ ، −٧ ، −١٤)

٤٤

نحلل أ إلى مركبتين : الأولى فى اتجاه و ع ومقدارها

أع = ‖أ‖ جتا θع = ١٠ جتا ٣٠° = ٥√٣

والثانية تقع فى المستوى الإحداثى س ص ومقدارها

أس ص = ‖أ‖ جا θع = ١٠ جا ٣٠° = ٥

ثم نحلل المركبة أس ص إلى مركبتين الأولى فى اتجاه و س ومقدارها

أس = أس ص جتا ٤٥° = ٥ × 1/√٢ = ٥√٢/٢

، الثانية فى اتجاه و ص ومقدارها

أص = أس ص جا ٤٥° = ٥ × 1/√٢ = ٥√٢/٢

وبذلك تكون الصورة الجبرية للمتجه أ هى

أ = ٥√٢/٢ س + ٥√٢/٢ ص + ٥√٣ ع

لإيجاد زوايا الاتجاه :

ى_أ = أ/‖أ‖ = (√٢/٤ ، √٢/٤ ، √٣/٢)

∴ θس = θص ≈ ٦٩° ١٨َ ، θع = ٣٠°

٤٥

① أس ص = √(٨² + ٦²) = ١٠

أس ص = ‖أ‖ جا ٣٠° ∴ 1/٢ ‖أ‖ = ١٠

∴ ‖أ‖ = ٢٠

② أ = (٦ ، ٨ ، ٢٠ جتا ٣٠°)

= ٦ س + ٨ ص + ١٠√٣ ع

③ ى_أ = أ/‖أ‖ = (٦ ، ٨ ، ٢٠ جتا ٣٠°)/٢٠

= ٠٫٣ س + ٠٫٤ ص + √٣/٢ ع

∴ θس = جتا⁻¹ ٠٫٣ ≈ ٧٢° ٣٣َ

، θص = جتا⁻¹ ٠٫٤ ≈ ٦٦° ٢٥َ

، θع = ٣٠°

حلول تمارين 3

١

أ . ب = ‖أ‖ ‖ب‖ جتا هـ

= ٦√٢ × ١٠√٢ × جتا ١٣٥° = −٦٠√٢

٢

أ . ب = ‖أ‖ ‖ب‖ جتا هـ = ٦ × ٢ × جتا ٦٠° = ٦

٣

① أ . ب = ٢٠ − ٤ − ٦ = ١٠

② أ . ب = −١٠ − ١٢ + ١٢ = −١٠

③ أ . ب = −١٨ − ٨ − ٢ = −٢٨

④ أ . ب = صفر

⑤ أ . ب = ٦ + ٠ − ١٨ = −١٢

٤

θ = جتا⁻¹ (أ . ب / ‖أ‖ ‖ب‖)

① θ = جتا⁻¹ (٨٠ / (١٦ × ١٠)) = ٦٠°

② θ = جتا⁻¹ (−٢٢٥√٢ / (٢٥ × ١٨)) = ١٣٥°

③ θ = جتا⁻¹ (٨١ / (٦ × (٥/٢ × ٦))) ≈ ٢٥° ٥١َ

④ θ = جتا⁻¹ (−٤٨٠ / (٣٢ × ٢٥)) ≈ ١٢٦° ٥٢َ

٥

① جتا θ = (٥ ، ١ ، −٢) . (١ ، ١ ، −١) / (√٣٠ × √٣) = ٨/٣√١٠

∴ θ ≈ ٤٥َ ٣٢° ٣٠ً

② جتا θ = (٢ ، ٢ ، −١٠) . (٧ ، ٦ ، ٤) / (٦√٣ × √١٠١) = −١٤/٦√٣٠٣

∴ θ ≈ ٩٧° ٤٢َ ١٣ً

③ جتا θ = (٤ ، ١ ، ٢) . (٠ ، −٢ ، ١) / (√٢١ √٥) = ٠/√١٠٥

∴ θ = ٩٠°

④ جتا θ = (٤ ، ٣ ، ٧) . (٢ ، ٥ ، ٤) / (√٧٤ √٤٥) = ٥١/٣√٣٧٠

∴ θ ≈ ٢٧° ٥٣َ ٥٠ً

⑤ جتا θ = (٠ ، −٣ ، ٨) . (١٠ ، ٠ ، −٥) / (√٧٣ × ٥√٥) = −٤٠/٥√٣٦٥

∴ θ ≈ ١١٤° ٤٥َ ١٨ً

٦

س . س = ١ ، ص . ص = ١

، ع . ع = ١ ، س . ص = ٠

، (٣ س) . (٤ ع) = ١٢ س . ع = صفر

، (٥ س) . (٢ س) = ١٠ س . س = ١٠

٧

① (أ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (ب)

⑤ (أ) ⑥ (جـ) ⑦ (د) ⑧ (ب)

⑨ (د) ⑩ (أ) ⑪ (د) ⑫ (أ)

⑬ (د) ⑭ (د) ⑮ (جـ) ⑯ (ب)

⑰ (ب) ⑱ (ب) ⑲ (جـ) ⑳ (د)

٨

① أب . ءحـ = ١٠ × ١٠ × جتا ٠° = ١٠٠

② أب . بحـ = ١٠ × ١٠ جتا ٩٠° = صفر

③ أب . حـأ = − أب . أحـ

= −١٠ × ١٠√٢ × جتا ٤٥° = −١٠٠

٩

① أب . أحـ = ١٢ × ١٢ × جتا ٦٠° = ٧٢

② أحـ . حـب = − حـأ . حـب

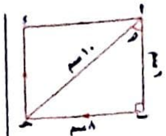
= −١٢ × ١٢ × جتا ٦٠° = −٧٢

③ (٤ أب) . (٣ حـب) = ١٢ أب . حـب

= ١٢ × ١٢ × ١٢ جتا ٦٠°

= ٨٦٤

١٠



① أب . أحـ

= ٦ × ١٠ × ٦/١٠ = ٣٦

② أب . حـء = ٦ × ٦ × جتا ١٨٠° = -٣٦

③ مركبة حـء في اتجاه بحـ = (حـء . بحـ) / ||بحـ|| = صفر

④ أحـ . بء = ١٠ × ١٠ جتا ٢ هـ = ١٠٠ جتا ٢ هـ

لكن : جتا ٢ هـ = ٢ جتا² هـ - ١ = ٢ × (٤/٥)² - ١

= ٣٢/٢٥ - ١ = ٧/٢٥

∴ أحـ . بء = ١٠٠ × ٧/٢٥ = ٢٨

حل آخر:

أحـ . بء = (أب + أحـ) . (بحـ + ءب)

= (أب . بحـ) + (أب . حـء)

+ (بحـ . بحـ) + (بحـ . حـء)

= (٦ × ٨ جتا ٩٠°) + (٦ × ٦ جتا ١٨٠°)

+ (٨ × ٨ × جتا ٠°) + (٨ × ٦ × جتا ٩٠°)

= صفر - ٣٦ + ٦٤ + صفر = ٢٨

١١

بء = أحـ = ٨√٢ سم

① أب . حـء = ٨ × ٨ جتا ١٨٠° = -٦٤

② (٢ بحـ) . (١/٤ أء) = ١/٢ (بحـ . أء)

= ١/٢ × ٨ × ٨ جتا ٠° = ٣٢

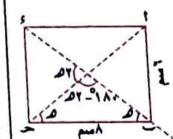
③ أب . أحـ = ٨ × ٨√٢ × جتا ٤٥° = ٦٤

④ بحـ . (٢ ءب) = ٢ (بحـ . ءب)

= ٢ × ٨ × ٨√٢ × جتا ١٣٥° = -١٢٨

⑤ أحـ . بء = ٨√٢ × ٨√٢ جتا ٩٠° = صفر

١٢



أحـ = بء = √(٦² + ٨²)

= ١٠ سم

① ٣ أء . ٢ حـء

= ٦ (أء . حـء)

= ٦ × ٨ × ٦ جتا ٩٠° = صفر

② (-٢ أب) . أحـ = -٢ (أب . أحـ)

= -٢ × ٦ × ١٠ × ٦/١٠ = -٧٢

③ بحـ . (٥/٢ ءب) = ٥/٢ (بحـ . ءب)

= ٥/٢ × ٨ × ١٠ جتا (١٨٠° - هـ)

= ٢٠٠ × - جتا هـ

= -٢٠٠ × ٤/٥ = -١٦٠

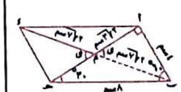
١٣

أحـ = √((٨)² - (٤)²) = ٤√٣ سم

∴ أم = ٢√٣ سم

∴ بم = √((٢√٣)² + (٤)²) = ٢√٧ سم

∴ بء = ٤√٧ سم



① حـأ . حـب

= ٤√٣ × ٨ × √٣/٢

= ٤٨

② (١/٢ أء) . (١/٢ ءحـ)

= ١/٤ (أء . ءحـ) = ١/٤ × ٨ × ٤ × جتا ١٢٠°

= ١٦/٢ × -١/٢ = -٨/٢

③ أب . (√٣ أء) = √٣ (أب . أء)

= √٣ × ٤ × ٨ × جتا ١٢٠°

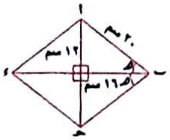
= -١٦√٣

④ (٧ بء) . أحـ = ٧ × ٤√٧ × ٤√٣ × جتا ى

= ٧ × ١٦ × √٧ × √٣ × √٣/√٧

= ٣٣٦

١٤



أب = √((١٢)² + (١٦)²)

= ٢٠ سم

① أب . (-٢ ءحـ)

= -٢ (أب . ءحـ)

= -٢ × ٢٠ × ٢٠ جتا ٠° = -٨٠٠

② (١/٢ أحـ) . ءب = ١/٢ [٢٤ × ٣٢ × جتا ٩٠°]

= صفر

③ أء . ءب = ٢٠ × ٣٢ جتا (١٨٠° - هـ)

= ٦٤٠ × - جتا هـ = ٦٤٠ × -٤/٥

= -٥١٢

④ بأ . بحـ = ٢٠ × ٢٠ جتا ٢ هـ

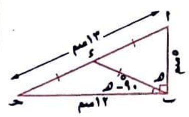
، جتا ٢ هـ = ٢ جتا² هـ - ١

= ٢ × (٤/٥)² - ١ = ٧/٢٥

∴ بأ . بحـ = ٤٠٠ × ٧/٢٥ = ١١٢

١٥

أحـ = √(٢٥ + ١٤٤) = ١٣ سم



① أب . أحـ

= ٥ × ١٣ جتا أ

= ٦٥ × ٥/١٣ = ٢٥

② بحـ . (١/٢ بأ) = ١/٢ (بحـ . بأ)

= ١/٢ × ١٢ × ٥ × جتا ٩٠° = صفر

③ بأ . بء = ٥ × ٦,٥ جتا هـ

= ٥ × ٦,٥ جتا أ = ٥ × ٦,٥ × ٥/١٣ = ١٢,٥

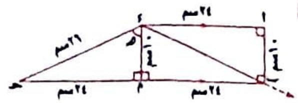
④ ءب . (١/٤ بحـ) = ١/٤ (ءب . بحـ)

= ١/٤ × ٦,٥ × ١٢ جتا (١٨٠° - (٩٠° - هـ))

= ٣٩/٢ × جتا (٩٠° + هـ)

= ٣٩/٢ × - جا هـ = ٣٩/٢ × -١٢/١٣ = -١٨

١٦



من الشكل : أب = ءم = √((٢٦)² - (٢٤)²) = ١٠ سم

① حـء . حـب = ٢٦ × ٤٨ × جتا حـ

= ٢٦ × ٤٨ × ٢٤/٢٦ = ١١٥٢

② ءب . بحـ = ٢٦ × ٤٨

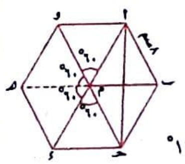
× جتا (١٨٠° - ق (∠ ءبحـ))

= ٢٦ × ٤٨ × - ٢٤/٢٦ = -١١٥٢

③ ءحـ . أب = ٢٦ × ١٠ × جتا هـ

= ٢٦٠ × ١٠/٢٦ = ١٠٠

١٧



① ∵ حـأ + أو = حـو

∴ (حـأ + أو) . أء

= حـو . أء

= ١٦ × ١٦ جتا ١٢٠°

= -١٢٨

② (أب - هـو) . أء

= أب . أء - هـو . أء

= ٨ × ١٦ جتا ٦٠° - ٨ × ١٦ جتا ١٨٠° = ١٩٢

١٨

① ٢ حـ . (-٣ ب) = -٦ (حـ . ب)

= -٦ (-١ + ٢ - ٢) = ٦

∴ أ + ٢/٣ × ٦ أ = ٥ أ = ٢٠ س - ١٥ ص

② ٢ ب + ٣ حـ = (٢، ٤، -٢) + (-٣، ٣، ٦)

= (-١، ٧، ٤)

∴ ١/٥ أ . (٢ ب + ٣ حـ)

= ١/٥ ((-٤) + (-٢١) + ٠) = -٥

∴ ٢ حـ - (-٥) ب

= (-٢، ٢، ٤) + ٥ (١، ٢، -١)

= (-٢، ٢، ٤) + (٥، ١٠، -٥)

= (٣، ١٢، -١)

١٩

١٢

∵ أ . ب = أب جتا هـ

∴ (٣، ٤، ٥) . (١، ك، ٥)

= ٥√٢ × √(٢٦ + ك²) × ١/٢

∴ ٣ + ٤ ك + ٢٥ = ٥√٢ √(٢٦ + ك²)

∴ ٤ ك + ٢٨ = ... √(٢٦ + ك²) (١)

بالتربيع ... = ٢٥/٢ (٢٦ + ك²)

٤٧

أب = ب - أ = (١، ٤، -١) ، ||أب|| = ٣√٢

حـء = ء - حـ = (-٢، -٨، ٢)

، ||حـء|| = ٦√٢

جتا θ = (أب . حـء) / (||أب|| ||حـء||) = (-٢ - ٣٢ - ٢) / ... = -١

θ = ١٨٠°

∴ (أ + ك ب) . حـ = صفر

∴ ٣ (٢ - ك) + ١ (٢ + ٢ ك) + ٠ = ٠

∴ ٦ - ٣ ك + ٢ + ٢ ك = ٠ ∴ ك = ٨

٢١

من Δ ءبحـ

ءحـ = √(٢² + ٦² - ٢ × ٢ × ٦ × جتا ٦٠°)

= ٢√٧ سم

١٢

أحـ = ... ٦√ ، ٨

١٠ سم

① ٢ أو . ٢ حـو

= ٦ (أو . حـو)

= ٦ × ٨ × ٦ × حتا ٩٠° = صفر

② (-٢ أب) . أحـ = -٢ (أب . أحـ)

= -٢ × ٦ × ١٠ × ٦/١٠ = -٧٢

③ بحـ . (٥/٢ بو) = ٥/٢ (بحـ . بو)

= ٥/٢ × ٨ × ١٠ حتا (١٨٠° - هـ)

= ٢٠٠ × - حتا هـ

= -٢٠٠ × ٤/٥ = -١٦٠

③ أب . (٣√٣ ...)

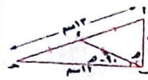
= ... ٣√

= -١٦ ٣√

④ (٧ بو) . أحـ = ٧ × ٤ ٧√ × ٤ ٣√ × حتا ى

= ٧ × ١٦ × ٧√ × ٣√ × ٣√/٧√

= ٣٣٦



① ... سم

٥ =

× ٦٥ =

② بحـ . (½ أب) = ½ (بحـ . أب)

= ½ × ١٢ × ٥ × حتا ٩٠° = صفر

③ أب . بو = ٥ × ٦,٥ حتا هـ

= ٥ × ٦,٥ حتا هـ = ٥ × ٦,٥ × ٥/١٣ = ١٢,٥

④ وب . (¼ بحـ) = ¼ (وب . بحـ)

= ¼ × ٦,٥ × ١٢ حتا (١٨٠° - (٩٠° - هـ))

= ٣٩/٢ × حتا (٩٠° + هـ)

= ٣٩/٢ × - حا هـ = ٣٩/٢ × - ١٢/١٣ = -١٨

= حـو . أو

= ١٦ × ١٦ حتا ١٢٠°

= -١٢٨

② (أب - هـو) . أو

= أب . أو - هـو . أو

= ٨ × ١٦ حتا ٦٠° - ٨ × ١٦ حتا ١٨٠° = ١٩٢

١٨

① ٢ حـ . (-٣ ب) = -٦ (حـ . ب)

= -٦ (-١ + ٢ - ٢) = ٦

∴ أ + ٢/٣ × ٦ أ = ٥ أ = ٢٠ س - ١٥ ص

② ٢ ب + ٣ حـ = (٢ ، ٤ ، -٢) + (-٣ ، ٣ ، ٦)

= (-١ ، ٧ ، ٤)

∴ ١/٥ أ . (٢ ب + ٢ حـ)

= ١/٥ ((-٤) + (-٢١) + ٠) = -٥

∴ ٢ حـ - (-٥) ب

= (-٢ ، ٢ ، ٤) + ٥ (١ ، ٢ ، -١)

= (-٢ ، ٢ ، ٤) + (٥ ، ١٠ ، -٥)

= (٣ ، ١٢ ، -١)

١٩

∵ بحـ = حـ - ب = (٢ ، -١ ، ١)

∵ أحـ = حـ - أ = (١ ، -٣ ، -٥)

∴ بحـ . أحـ = ٢ + ٣ - ٥ = ٠

∴ Δ أبحـ قائم فى حـ

٢٠

أ + ب = (٤ ، ١ ، -١)

أ - ب = (-٢ ، ٣ ، -٥)

∴ (أ + ب) . (أ - ب) = -٨ + ٣ + ٥ = صفر

∴ المتجه (أ + ب) عمودى على المتجه (أ - ب)

٢١

① (ب)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (جـ)
⑤ (جـ)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (جـ)
⑨ (د)	⑩ (ب)	⑪ (د)	⑫ (د)
⑬ (د)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (ب)	⑱ (ب)	⑲ (ب)	⑳ (جـ)
㉑ (جـ)	㉒ (د)	㉓ (ب)	㉔ (أ)
㉕ (ب)	㉖ (أ)	㉗ (جـ)	㉘ (ب)
㉙ (ب)	㉚ (د)	㉛ (جـ)	㉜ (جـ)
㉝ (جـ)	㉞ (أ)	㉟ (أ)	

٢٢

حتا θ = (ل ، م ، ن) . (ل َ، م َ، ن َ) / (١ × ١)

= ل ل َ + م م َ + ن ن َ

٢٣

∵ أ . ب = أ ب حتا هـ

∴ (٣ ، ٤ ، ٥) . (١ ، ك ، ٥)

= ٥ ٢√ × ٢٦ + ك٢√ × ½

∴ ٣ + ٤ ك + ٢٥ = ٥/٢ ٢√ ٢٦ + ك٢√

∴ ٤ ك + ٢٨ = ٥/٢ ٢√ ٢٦ + ك٢√ (١)

بالتربيع ١٦ ك٢ + ٢٢٤ ك + ٧٨٤ = ٢٥/٢ (٢٦ + ك٢)

(حيث ٤ ك + ٢٨ ≥ ٠ أى أن ك ≥ -٧)

∴ ٧ ك٢ + ٤٤٨ ك + ٩١٨ = ٠

∴ ك ≃ -٢,١٢ أو -٦١,٨٨ (مرفوض)

٢٤

أ . ب = ٢ حا٢ θ + لو٣ س . لو٥ ٢٧ + ٢ حتا٢ θ

= ١١

لو٣ س لو٥ ٢٧ = ٩ لو٣ س = ٩ / لو٥ ٢٧

∴ س = ٣^(٩/لو٥ ٢٧) ≃ ٢١,٠٤

٢٥

بو = و - ب = (٠ ، ٠ ، ٦) - (٤ ، ٨ ، ٦)

= (-٤ ، -٨ ، ٠)

حـأ = أ - حـ = (٠ ، ٨ ، ٦) - (٤ ، ٠ ، ٦)

= (-٤ ، ٨ ، ٠)

بو . حـأ = (-٤ ، -٨ ، ٠) . (-٤ ، ٨ ، ٠)

= ١٦ - ٦٤ + ٠ = -٤٨

٢٦

∵ أ . ب = ‖أ‖ ‖ب‖ حتا θ

∴ ½ = ‖أ‖٢ × حتا ٦٠°

∴ ‖أ‖٢ = ١ ∴ ‖أ‖ = ١

٢٧

أب = ب - أ = (١ ، ٤ ، -١) ، ‖أب‖ = ٣ ٢√

حـو = و - حـ = (-٢ ، -٨ ، ٢)

، ‖حـو‖ = ٦ ٢√

حتا θ = (أب . حـو) / (‖أب‖ ‖حـو‖) = (-٢ - ٣٢ - ٢) / (٣ ٢√ × ٦ ٢√) = -١

θ = ١٨٠°

حل آخر: ∵ حـو = -٢ أب

∴ حـو فى الاتجاه المضاد للمتجه أب

∴ قياس الزاوية بينهما = ١٨٠°

٢٨

∵ حتا θ = (ك ، ٣ ك ، ١) . (٧ ، -٢ ، ١) / (√(ك٢ + ٩ ك٢ + ١) √(٤٩ + ٤ + ١))

= (٧ ك - ٦ ك + ١) / (√(١٠ ك٢ + ١) √٥٤)

، ∵ θ منفرجة ∴ حتا θ سالبة

∴ ٧ ك - ٦ ك + ١ < ٠ ∴ ك + ١ < ٠

∴ ك < -١ ∴ ك ∈]-∞ ، -١[

٢٩

(أ + ب) . (أ - ب)

= ‖أ‖٢ - أ . ب + ب . أ - ‖ب‖٢

= ‖أ‖٢ - ‖ب‖٢ = ٨

∴ ٩ ‖ب‖٢ - ‖ب‖٢ = ٨

∴ ‖ب‖ = ١ منها ‖أ‖ = ٣

٣٠

أ + ك ب = (٢ - ك ، ٢ + ٢ ك ، ٣ + ك)

حـ = (٣ ، ١ ، ٠)

فى حالة أن المتجه (أ + ك ب) يكون عموديًا على المتجه حـ

∴ (أ + ك ب) . حـ = صفر

∴ ٣ (٢ - ك) + ١ (٢ + ٢ ك) + ٠ = ٠

∴ ٦ - ٣ ك + ٢ + ٢ ك = ٠ ∴ ك = ٨

٣١

من Δ وبحـ

حـو = √(٢٢ + ٦٢ - ٢ × ٢ × ٦ × حتا ٦٠°)

= ٢ ٧√ سم.

∴ حـو . حـب = حـو × حـب × حتا (د وحـب)

= ٢ ٧√ × ٦ × (٦٢ + (٢ ٧√)٢ - ٢٢) / (٢ × ٦ × ٢ ٧√) = ٣٠

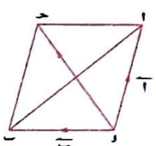
حل آخر:

حـو . حـب = (حـأ + أو) . حـب

= حـأ . حـب + أو . حـب

= ٦ × ٦ حتا ٦٠° + ٤ × ٦ حتا ٦٠ = ٣٠

٣٢



∵ حا (د أوب) = ٢٤/٢٥

، أب > وحـ

∴ د أوب منفرجة

∴ حتا (د أوب) = -٧/٢٥

∴ وحـ = وأ + وب = أ + ب

∴ ‖وحـ‖٢ = (أ + ب) . (أ + ب)

= ‖أ‖٢ + ‖ب‖٢ + ٢ (أ . ب)

= ١ + ١ + ٢ × ١ × ١ × -٧/٢٥ = ٣٦/٢٥

∴ ‖وحـ‖ = ٦/٥ = ١,٢ وحدة طول.

، ∵ بأ = أ - ب

∴ ‖بأ‖٢ = (أ - ب) . (أ - ب)

= ‖أ‖٢ + ‖ب‖٢ - ٢ (أ . ب)

= ١ + ١ - ٢ × ١ × ١ × -٧/٢٥ = ٦٤/٢٥

∴ ‖بأ‖ = ٨/٥ = ١,٦ وحدة طول.

٣٣

① $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|$ جتا هـ

$= ٣٠ \times ٤٠ \times$ جتا ٦٠°

$= ٦٠٠$

② $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ + ٢ (\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}})$

$= ٩٠٠ + ١٦٠٠ + ٢ \times ٦٠٠$

$= ٣٧٠٠$

$\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| = \sqrt{٣٧٠٠} = ١٠ \sqrt{٣٧}$

③ مركبة $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}})$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أ}}$

$= \frac{(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot \overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|} = \frac{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|}$

$= \frac{(٣٠)^٢ + ٦٠٠}{٣٠} = ٥٠$

٣٤

① $\therefore \overrightarrow{\text{أب}} = (-٢ ، ٤ ، -٢)$ ، $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = ٢\sqrt{٦}$

$\overrightarrow{\text{بحـ}} = (-١ ، ١ ، -٢)$ ، $\|\overrightarrow{\text{بحـ}}\| = \sqrt{٦}$

، $\overrightarrow{\text{أحـ}} = (-٣ ، ٥ ، -٤)$ ، $\|\overrightarrow{\text{أحـ}}\| = ٥\sqrt{٢}$

، $\because$ ق $(\angle$ أ$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أحـ}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\| \, \|\overrightarrow{\text{أحـ}}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(\angle$ أ$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{٦ + ٢٠ + ٨}{٢٠\sqrt{٣}} \right) \simeq ٢٢^\circ \; ٢' \; ١١''$

، $\because$ ق $(\angle$ ب$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{\overrightarrow{\text{بأ}} \cdot \overrightarrow{\text{بحـ}}}{\|\overrightarrow{\text{بأ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{بحـ}}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(\angle$ ب$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{-٢ - ٤ - ٤}{١٢} \right)$

$\simeq ١٤٦^\circ \; ٢٦' \; ٤٤''$

، ق $(\angle$ حـ$) = ١٨٠^\circ - (٢٢^\circ \; ٢' \; ١١'' + ١٤٦^\circ \; ٢٦' \; ٤٤'')$

$= ١١^\circ \; ٣١' \; ٤''$

② $\overrightarrow{\text{أب}} = (-٣ ، ١٢ ، ٥)$ ، $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{١٧٨}$

$\overrightarrow{\text{بحـ}} = (٥ ، ١ ، -٩)$ ، $\|\overrightarrow{\text{بحـ}}\| = \sqrt{١٠٧}$

، $\overrightarrow{\text{أحـ}} = (٢ ، ١٣ ، -٤)$ ، $\|\overrightarrow{\text{أحـ}}\| = ٣\sqrt{٢١}$

، $\because$ ق $(\angle$ أ$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أحـ}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\| \, \|\overrightarrow{\text{أحـ}}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(\angle$ أ$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{-٦ + ١٥٦ - ٢٠}{\sqrt{١٧٨} \times ٣\sqrt{٢١}} \right)$

$\simeq ٥٦^\circ \; ٥١' \; ٤٤''$

، $\because$ ق $(\angle$ ب$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{\overrightarrow{\text{بأ}} \cdot \overrightarrow{\text{بحـ}}}{\|\overrightarrow{\text{بأ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{بحـ}}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(\angle$ ب$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{١٥ - ١٢ + ٤٥}{\sqrt{١٧٨} \sqrt{١٠٧}} \right)$

$\simeq ٦٩^\circ \; ٤٨' \; ٤٨''$

، ق $(\angle$ حـ$) = ١٨٠^\circ - (٥٦^\circ \; ٥١' \; ٤٤'' + ٦٩^\circ \; ٤٨' \; ٤٨'')$

$= ٥٣^\circ \; ١٩' \; ٢٨''$

③ $\overrightarrow{\text{أب}} = (-٢ ، -٢ ، -٣)$ ، $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{١٧}$

، $\overrightarrow{\text{بحـ}} = (١ ، ١ ، ٢)$ ، $\|\overrightarrow{\text{بحـ}}\| = \sqrt{٦}$

، $\overrightarrow{\text{أحـ}} = (-١ ، -١ ، -١)$ ، $\|\overrightarrow{\text{أحـ}}\| = \sqrt{٣}$

، $\because$ ق $(\angle$ أ$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{أحـ}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\| \, \|\overrightarrow{\text{أحـ}}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(\angle$ أ$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{٢ + ٢ + ٣}{\sqrt{١٧}\sqrt{٣}} \right) \simeq ١٨^\circ \; ٢٥' \; ١١''$

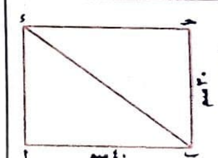
، $\because$ ق $(\angle$ ب$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{\overrightarrow{\text{بحـ}} \cdot \overrightarrow{\text{بأ}}}{\|\overrightarrow{\text{بحـ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{بأ}}\|} \right)$

$\therefore$ ق $(\angle$ ب$) =$ جتا$^{-١} \left(\frac{٢ + ٢ + ٦}{\sqrt{١٧}\sqrt{٦}} \right) \simeq ٨^\circ \; ٢' \; ٥٨''$

ق $(\angle$ حـ$) = ١٨٠^\circ - (١٨^\circ \; ٢٥' \; ١١'' + ٥٨^\circ \; ٢' \; ٨'')$

$= ١٦٠^\circ \; ٣١' \; ٤٤''$

٣٥



مركبة $\overrightarrow{\text{بء}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{بحـ}}$

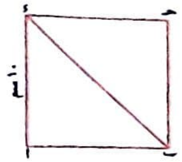
$= \|\overrightarrow{\text{بء}}\|$ جتا $(\angle$ ءبحـ$)$

$= ٥٠ \times \frac{٣٠}{٥٠} = ٣٠$

مركبة $\overrightarrow{\text{بء}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{ءحـ}}$

$= - \|\overrightarrow{\text{بء}}\|$ جتا $(\angle$ بءحـ$) = -٥٠ \times \frac{٤٠}{٥٠} = -٤٠$

٣٦



$\overrightarrow{\text{بء}} \cdot \overrightarrow{\text{بأ}}$

$= \|\overrightarrow{\text{بء}}\| \, \|\overrightarrow{\text{بأ}}\|$ جتا $(\angle$ ءبأ$)$

$= ١٠\sqrt{٢} \times ١٠ \times$ جتا ٤٥°

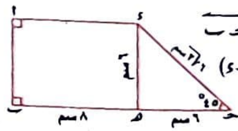
$= ١٠٠$

مسقط $\overrightarrow{\text{بء}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{حـب}}$

$= - \|\overrightarrow{\text{بء}}\|$ جتا $(\angle$ ءبحـ$)$

$= -١٠\sqrt{٢} \times$ جتا $٤٥^\circ = -١٠$

٣٧



مركبة $\overrightarrow{\text{حـء}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{حـب}}$

$= \|\overrightarrow{\text{حـء}}\|$ جتا $(\angle$ بحـء$)$

$= ٦\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = ٦$

مركبة $\overrightarrow{\text{حـء}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أء}} = \|\overrightarrow{\text{حـء}}\|$ جتا $\angle$ حـءأ

$= ٦\sqrt{٢} \times \frac{-١}{\sqrt{٢}} = -٦$

مركبة $\overrightarrow{\text{حـء}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}} = - \|\overrightarrow{\text{حـء}}\|$ جتا ٤٥°

$= -٦\sqrt{٢} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} = -٦$

٣٨

$(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) = \overrightarrow{\text{و}} \cdot \overrightarrow{\text{و}}$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$

$+ \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \|\overrightarrow{\text{حـ}}\|^٢ = ٠$

$\therefore ٢ \, \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + ٢ \, \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} + ٢ \, \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} + ٣ = ٠$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} = \frac{-٣}{٢}$

٣٩

$\because \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = -٢ \overrightarrow{\text{حـ}}$

$\therefore (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) = (-٢ \overrightarrow{\text{حـ}}) \cdot (-٢ \overrightarrow{\text{حـ}})$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ + ٢ (\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}) = ٤ \|\overrightarrow{\text{حـ}}\|^٢$

$\therefore ١ + ١٦ + ٢ (\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}) = ١٦$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = -\frac{١}{٢}$

وبالمثل : $\overrightarrow{\text{أ}} + ٢ \overrightarrow{\text{حـ}} = - \overrightarrow{\text{ب}}$

$\therefore (\overrightarrow{\text{أ}} + ٢ \overrightarrow{\text{حـ}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} + ٢ \overrightarrow{\text{حـ}}) = (- \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (- \overrightarrow{\text{ب}})$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + ٤ \|\overrightarrow{\text{حـ}}\|^٢ + ٤ (\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}}) = \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$

$\therefore ١ + ١٦ + ٤ (\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}}) = ١٦$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} = \frac{-١}{٤}$

وبالمثل : $\overrightarrow{\text{ب}} + ٢ \overrightarrow{\text{حـ}} = - \overrightarrow{\text{أ}}$

$\therefore (\overrightarrow{\text{ب}} + ٢ \overrightarrow{\text{حـ}}) \cdot (\overrightarrow{\text{ب}} + ٢ \overrightarrow{\text{حـ}}) = (- \overrightarrow{\text{أ}}) \cdot (- \overrightarrow{\text{أ}})$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ + ٤ \|\overrightarrow{\text{حـ}}\|^٢ + ٤ (\overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}}) = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢$

$\therefore ١٦ + ١٦ + ٤ (\overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}}) = ١$

$\therefore \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} = \frac{-٣١}{٤}$

$\therefore$ م $= -\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤} - \frac{٣١}{٤} = \frac{-١٧}{٢}$

٤٠

$\because \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\therefore (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

$\therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ + \overrightarrow{\text{حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} =$ صفر

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + ٢٥ + \overrightarrow{\text{حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٠$ (١)

$\because \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\therefore (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}}$

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} + \|\overrightarrow{\text{حـ}}\|^٢ = ٠$

$\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} + ٤٩ = ٠$ (٢)

$\because \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\therefore (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = ٠$

$٩ + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{حـ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} = ٠$ (٣)

بجمع (١) ، (٣) ونطرح منهم (٢) :

$٢ \, \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + ٢٥ + ٩ - ٤٩ = ٠$

$٢ \, \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ١٥ \quad \therefore \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٧,٥$

جتا $\theta = \frac{\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}}{\|\overrightarrow{\text{أ}}\| \, \|\overrightarrow{\text{ب}}\|} = \frac{٧,٥}{٣ \times ٥} = \frac{١}{٢} \quad \therefore \theta = ٦٠^\circ$

حل آخر :

$\because \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}} \quad \therefore \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} = - \overrightarrow{\text{حـ}}$

$\therefore (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) = (- \overrightarrow{\text{حـ}}) \cdot (- \overrightarrow{\text{حـ}})$

$\therefore ($أحـ$)^٢ = ($أب$)^٢ + ($بحـ$)^٢$

$- ٢ ($أب$) ($بحـ$)$ جتا $(\angle$ أبحـ$)$ (١)

بالمثل فى Δ أبء : $\overrightarrow{\text{بء}} = \overrightarrow{\text{بأ}} + \overrightarrow{\text{أء}}$

ويمكن إثبات أن :

$($بء$)^٢ = ($أب$)^٢ + ($أء$)^٢ - ٢$ ... (٢)

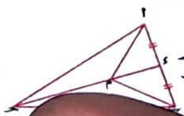
$\because$ ءبءأ تكمل ...

٤٥

$\because$ م نقطة تلاقى متوسطات Δ أبحـ

$\therefore \overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} = ٢ \, \overrightarrow{\text{مء}}$

$= \overrightarrow{\text{حـم}} = - \overrightarrow{\text{محـ}}$



$\therefore \overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}} + \overrightarrow{\text{محـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\therefore (\overrightarrow{\text{مأ}} + \overrightarrow{\text{مب}}$ ...

② المركبة الاتجاهية للمتجه $\overrightarrow{\text{أحـ}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{أب}}$

$= \left(\frac{\overrightarrow{\text{أحـ}} \cdot \overrightarrow{\text{أب}}}{\|\overrightarrow{\text{أب}}\|^٢} \right) \overrightarrow{\text{أب}}$

$= \left[\frac{(٠ ، ٦ ، ٣) \cdot (١ ، ٢ ، ٣)}{\left(\sqrt{(١)^٢ + (٢)^٢ + (٣)^٢}\right)^٢} \right] (١ ، ٢ ، ٣)$

$= \frac{٢١}{١٤} (١ ، ٢ ، ٣) = \frac{٣}{٢} (١ ، ٢ ، ٣)$

$\left(\frac{٣}{٢} ، ٣ ، \frac{٩}{٢} \right)$

$\therefore$ ق(د أ) = جتا$^{-1}$ $\left(\frac{8+2+6}{2\sqrt{30}}\right)$ = 22َ 22ً 11°

$\therefore$ ق(د ب) = جتا$^{-1}$ $\left(\frac{\overline{\text{بأ}}\cdot\overline{\text{بح}}}{\|\overline{\text{بأ}}\|\,\|\overline{\text{بح}}\|}\right)$

$\therefore$ ق(د ب) = جتا$^{-1}$ $\left(\frac{-2-1-4}{12}\right)$

= 44ً 26َ 146°

، ق(د ح) = 180° − (22ً 22َ 11° + 44ً 26َ 146°)

= 4ً 41َ 22°

② $\overline{\text{أب}}$ = (−3 ، 12 ، 5) ، $\|\overline{\text{أب}}\|$ = $\sqrt{178}$

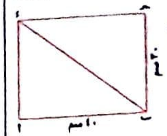
$\overline{\text{بح}}$ = (5 ، 1 ، −9) ، $\|\overline{\text{بح}}\|$ = $\sqrt{107}$

$\therefore$ ق(د ب) = جتا$^{-1}$ $\left(\frac{2+2+6}{\sqrt{17}\sqrt{6}}\right)$ ≃ 58ً 2َ 8°

ق(د ح) = 180° − (68ً 25َ 11° + 58ً 2َ 8°)

= 44ً 31َ 160°

35



مركبة $\overline{\text{بء}}$ فى اتجاه $\overline{\text{بح}}$

= $\|\overline{\text{بء}}\|$ جتا (د ء ب ح)

= 50 × $\frac{30}{50}$ = 30

مركبة $\overline{\text{بء}}$ فى اتجاه $\overline{\text{ءح}}$

= − $\|\overline{\text{بء}}\|$ جتا (د ب ء ح) = −50 × $\frac{40}{50}$ = −40

38

$(\vec{أ}+\vec{ب}+\vec{ح})\cdot(\vec{أ}+\vec{ب}+\vec{ح}) = \vec{و}\cdot\vec{و}$

$\therefore \|\vec{أ}\|^2 + \vec{أ}\cdot\vec{ب} + \vec{أ}\cdot\vec{ح} + \vec{ب}\cdot\vec{أ} + \|\vec{ب}\|^2$

$+ \vec{ب}\cdot\vec{ح} + \vec{ح}\cdot\vec{أ} + \vec{ح}\cdot\vec{ب} + \|\vec{ح}\|^2 = 0$

$\therefore 2\,\vec{أ}\cdot\vec{ب} + 2\,\vec{أ}\cdot\vec{ح} + 2\,\vec{ب}\cdot\vec{ح} + 3 = 0$

$\therefore \vec{أ}\cdot\vec{ب} + \vec{أ}\cdot\vec{ح} + \vec{ب}\cdot\vec{ح} = \frac{-3}{2}$

39

$\because \vec{أ}+\vec{ب} = -2\,\vec{ح}$

$\therefore (\vec{أ}+\vec{ب})\cdot(\vec{أ}+\vec{ب}) = (-2\,\vec{ح})\cdot(-2\,\vec{ح})$

$\therefore \|\vec{أ}\|^2 + \|\vec{ب}\|^2 + 2\,(\vec{أ}\cdot\vec{ب}) = 4\,\|\vec{ح}\|^2$

$\vec{أ}\cdot\vec{ب} + 15 + \vec{ح}\cdot\vec{ب} = 0$ (1)

$\because \vec{أ}+\vec{ب}+\vec{ح} = \vec{و}$

$\therefore (\vec{أ}+\vec{ب}+\vec{ح})\cdot\vec{ح} = \vec{و}\cdot\vec{ح}$

$\vec{أ}\cdot\vec{ح} + \vec{ب}\cdot\vec{ح} + \|\vec{ح}\|^2 = 0$

$\vec{أ}\cdot\vec{ح} + \vec{ب}\cdot\vec{ح} + 49 = 0$ (2)

$\because \vec{أ}+\vec{ب}+\vec{ح} = \vec{و}$

$\therefore (\vec{أ}+\vec{ب}+\vec{ح})\cdot\vec{أ} = \vec{و}\cdot\vec{أ}$

$\|\vec{أ}\|^2 + \vec{ب}\cdot\vec{أ} + \vec{ح}\cdot\vec{أ} = 0$

$9 + \vec{ب}\cdot\vec{أ} + \vec{ح}\cdot\vec{أ} = 0$ (3)

بجمع (1) ، (3) ونطرح منهم (2) :

$2\,\vec{أ}\cdot\vec{ب} + 25 + 9 - 49 = 0$

$2\,\vec{أ}\cdot\vec{ب} = 15 \qquad \therefore \vec{أ}\cdot\vec{ب} = 7.5$

جتا θ $= \frac{\vec{أ}\cdot\vec{ب}}{\|\vec{أ}\|\,\|\vec{ب}\|} = \frac{7.5}{3\times5} = \frac{1}{2} \qquad \therefore θ = 60°$

حل آخر:

$\because \vec{أ}+\vec{ب}+\vec{ح} = \vec{و} \qquad \therefore \vec{أ}+\vec{ب} = -\vec{ح}$

$\therefore (\vec{أ}+\vec{ب})\cdot(\vec{أ}+\vec{ب}) = (-\vec{ح})\cdot(-\vec{ح})$

$\therefore \|\vec{أ}\|^2 + \|\vec{ب}\|^2 + 2\,\vec{أ}\cdot\vec{ب} = \|\vec{ح}\|^2$

$\therefore 9 + 25 + 2\times3\times5$ جتا θ $= 49$

$\therefore$ جتا θ $= \frac{1}{2} \qquad \therefore θ = 60°$

41

$\overline{\text{حأ}}\cdot\overline{\text{حب}}$ = ح أ × ح ب × جتا ح

$= ب \times أ \times \frac{أ^2 + ب^2 - ح^2}{2أب}$

$= \frac{1}{2}(أ^2 + ب^2 - ح^2)$

42

$\because \overline{\text{أب}} = \overline{\text{أح}} + \overline{\text{حب}}$

$\therefore \overline{\text{أب}}\cdot\overline{\text{أب}} = (\overline{\text{أح}} + \overline{\text{حب}})\cdot(\overline{\text{أح}} + \overline{\text{حب}})$

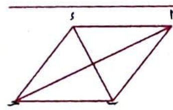
$(أب)^2 = (أح)^2 + \overline{\text{أح}}\cdot\overline{\text{حب}}$

$+ \overline{\text{حب}}\cdot\overline{\text{أح}} + (حب)^2$

$= (أح)^2 + (حب)^2 - 2\,\overline{\text{أح}}\cdot\overline{\text{بح}}$

$= (أح)^2 + (حب)^2 - 2\,(أح)\,(بح)$ جتا ح

43



فى Δ أ ب ح :

$\overline{\text{أح}} = \overline{\text{أب}} + \overline{\text{بح}}$

$\overline{\text{أح}}\cdot\overline{\text{أح}} = (\overline{\text{أب}} + \overline{\text{بح}})\cdot(\overline{\text{أب}} + \overline{\text{بح}})$

$(أح)^2 = (أب)^2 + \overline{\text{أب}}\cdot\overline{\text{بح}}$

$+ \overline{\text{بح}}\cdot\overline{\text{أب}} + (بح)^2$

$\therefore (أح)^2 = (أب)^2 + (بح)^2$

$- 2\,(أب)\,(بح)$ جتا (د أ ب ح) (1)

بالمثل فى Δ أ ب ء : $\overline{\text{بء}} = \overline{\text{بأ}} + \overline{\text{أء}}$

ويمكن إثبات أن :

$(بء)^2 = (أب)^2 + (أء)^2 - 2\,(أب)\,(أء)$ جتا (د ب أ ء) (2)

$\because$ د ب أ ء تكمل د أ ب ح

$\therefore$ جتا (د ب أ ء) = − جتا د أ ب ح

، أ ب = ء ح

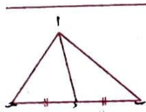
بجمع المعادلتين (1) ، (2) ينتج أن :

$(أح)^2 + (بء)^2 = (أب)^2 + (بح)^2 + (أب)^2$

$+ (أء)^2 = (أب)^2 + (بح)^2$

$+ (حء)^2 + (ءأ)^2$ (وهو المطلوب)

44



فى Δ أ ب ء :

$\overline{\text{أب}} = \overline{\text{أء}} + \overline{\text{ءب}}$

$(أب)^2 = (أء)^2 + \overline{\text{أء}}\cdot\overline{\text{ءب}} + \overline{\text{ءب}}\cdot\overline{\text{أء}} + (ءب)^2$

$= (أء)^2 + (ءب)^2$

$- 2\,(أء)\,(ءب)$ جتا (د أ ء ب) (1)

فى Δ أ ح ء : $\because \overline{\text{أح}} = \overline{\text{أء}} + \overline{\text{ءح}}$

بالمثل يمكن أثبات أن :

$(أح)^2 = (أء)^2 + (ءح)^2$

$= 2\,(أء)\,(ءح)$ جتا د أ ء ح (2)

$\because$ د أ ء ح تكمل د أ ء ب

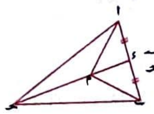
$\therefore$ جتا (د أ ء ح) = − جتا (د أ ء ب)

وبجمع المعادلتين :

$(أب)^2 + (أح)^2 = 2\,(أء)^2 + 2\,(بء)^2$

45

$\because$ م نقطة تلاقى متوسطات Δ أ ب ح



$\therefore \overline{\text{مأ}} + \overline{\text{مب}} = 2\,\overline{\text{مء}}$

$= \overline{\text{حم}} = -\overline{\text{مح}}$

$\therefore \overline{\text{مأ}} + \overline{\text{مب}} + \overline{\text{مح}} = \vec{و}$

$\therefore (\overline{\text{مأ}} + \overline{\text{مب}} + \overline{\text{مح}})\cdot(\overline{\text{مأ}} + \overline{\text{مب}} + \overline{\text{مح}})$

= صفر

$\therefore \|\overline{\text{مأ}}\|^2 + \overline{\text{مأ}}\cdot\overline{\text{مب}} + \overline{\text{مأ}}\times\overline{\text{مح}} + \overline{\text{مب}}\cdot\overline{\text{مأ}}$

$+ \|\overline{\text{مب}}\|^2 + \overline{\text{مب}}\cdot\overline{\text{مح}} + \overline{\text{مح}}\cdot\overline{\text{مأ}}$

$+ \overline{\text{مح}}\cdot\overline{\text{مب}} + \|\overline{\text{مح}}\|^2$ = صفر

$\therefore \|\overline{\text{مأ}}\|^2 + \|\overline{\text{مب}}\|^2 + \|\overline{\text{مح}}\|^2 + 2\,\overline{\text{مأ}}\cdot\overline{\text{مب}}$

$+ 2\,\overline{\text{مب}}\cdot\overline{\text{مح}} + 2\,\overline{\text{مح}}\cdot\overline{\text{مأ}}$ = صفر

$\therefore \|\overline{\text{مأ}}\|^2 + \|\overline{\text{مب}}\|^2 + \|\overline{\text{مح}}\|^2$

$= 2\,(\overline{\text{أم}}\cdot\overline{\text{مب}} + \overline{\text{بم}}\cdot\overline{\text{مح}} + \overline{\text{حم}}\cdot\overline{\text{مأ}})$

$\therefore \overline{\text{أم}}\cdot\overline{\text{مب}} + \overline{\text{بم}}\cdot\overline{\text{مح}} + \overline{\text{حم}}\cdot\overline{\text{مأ}}$

$= \frac{1}{2}\left(\|\overline{\text{مأ}}\|^2 + \|\overline{\text{مب}}\|^2 + \|\overline{\text{مح}}\|^2\right)$

46

$\because \overline{\text{بأ}} = \vec{أ} - \vec{ب} = (-1 ، -2 ، -3)$

، $\overline{\text{أح}} = \overline{\text{أب}} + \overline{\text{بح}} = (1 ، 2 ، 3) + (-1 ، 4 ، 0)$

$= (0 ، 6 ، 3)$

① جتا (د أ ب ح) $= \frac{\overline{\text{بأ}}\cdot\overline{\text{بح}}}{\|\overline{\text{بأ}}\|\,\|\overline{\text{بح}}\|}$

$= \frac{(-1 ، -2 ، -3)\cdot(-1 ، 4 ، 0)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(-3)^2}\,\sqrt{(-1)^2+(4)^2+(0)^2}}$

$= \frac{-7}{\sqrt{14}\,\sqrt{17}}$

$\therefore$ ق(د أ ب ح) = 3َ 59ً 116° ≃ 117°

② المركبة الاتجاهية للمتجه $\overline{\text{أح}}$ فى اتجاه $\overline{\text{أب}}$

$= \left(\frac{\overline{\text{أح}}\cdot\overline{\text{أب}}}{\|\overline{\text{أب}}\|^2}\right)\overline{\text{أب}}$

$= \left[\frac{(0 ، 6 ، 3)\cdot(1 ، 2 ، 3)}{\left(\sqrt{(1)^2+(2)^2+(3)^2}\right)^2}\right](1 ، 2 ، 3)$

$= \frac{21}{14}(1 ، 2 ، 3) = \frac{3}{2}(1 ، 2 ، 3)$

$= \left(\frac{3}{2} ، 3 ، \frac{9}{2}\right)$

47

نفرض أن $\vec{أ}$ = (س ، ص ، ع)

$\vec{أ}\cdot\vec{ب}$ = 3 س − 5 ع = −1 (1)

$\vec{أ}\cdot\vec{ح}$ = 2 س + 7 ص = 6 (2)

$\vec{أ}\cdot\vec{ء}$ = س + ص + ع = 5 (3)

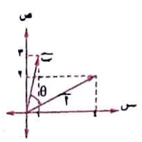
بحل المعادلات : 1 ، 2 ، 3 نجد أن :

س = 3 ، ص = 0 ، ع = 2

$\therefore \vec{أ}$ = (3 ، 0 ، 2)

48

شكل (1) :



$\vec{أ}$ = (4 ، 2)

$\vec{ب}$ = (1 ، 3)

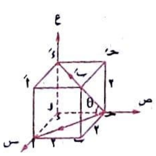
$\therefore \vec{أ}\cdot\vec{ب}$ = 4 + 6 = 10

، $\|\vec{أ}\| = 2\sqrt{5}$ ، $\|\vec{ب}\| = \sqrt{10}$

$\therefore θ$ = جتا$^{-1}$ $\left(\frac{10}{2\sqrt{5}\times\sqrt{10}}\right)$

= جتا$^{-1}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 45°$

شكل (2) :



$\overline{\text{حءَ}} = \vec{ءَ} - \vec{ح}$

= (0 ، 0 ، 2)

− (0 ، 2 ، 0)

= (0 ، −2 ، 2)

، $\overrightarrow{\text{حأ}} = \overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ح}} = (٢ ، ٠ ، ٠) - (٠ ، ٢ ، ٠)$

$= (٢ ، -٢ ، ٠)$

∴ $\overrightarrow{\text{حء}} \cdot \overrightarrow{\text{حأ}} = ٠ + ٤ + ٠ = ٤$

، $\|\overrightarrow{\text{حء}}\| = ٢\sqrt{٢}$ ، $\|\overrightarrow{\text{حأ}}\| = ٢\sqrt{٢}$

∴ $\theta = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{٤}{٢\sqrt{٢} \times ٢\sqrt{٢}}\right) = \text{جتا}^{-1}\left(\frac{١}{٢}\right) = ٦٠^\circ$

حل آخر: ∵ الشكل مكعب

، حء = ءأ = أح ∴ Δ أحء متساوى الأضلاع

∴ $\theta = ٦٠^\circ$

٤٩

إحداثيات النقطة أ (٠ ، ٣ ، ٢)

إحداثيات النقطة ب (٢ ، ٠ ، ٨)

إحداثيات النقطة ح (٢ ، ٠ ، ٤)

∴ $\overrightarrow{\text{بأ}} = (-٢ ، ٣ ، -٦)$ ، $\overrightarrow{\text{بح}} = (٠ ، ٠ ، -٤)$

$\text{جتا}\,\theta = \frac{(-٢ ، ٣ ، -٦) \cdot (٠ ، ٠ ، -٤)}{\sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}\sqrt{(-٤)^٢}} = \frac{٢٤}{٢٨} = \frac{٦}{٧}$

∴ $\theta = ٣١^\circ$

٥٠

إحداثيات النقطة أ (٠ ، ٦ ، ٧)

، إحداثيات النقطة ب (٥ ، ٢ ، ٥)

، إحداثيات النقطة ح (٥ ، ١٠ ، ٥)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٥ ، -٤ ، -٢)$

، $\overrightarrow{\text{أح}} = \overrightarrow{\text{ح}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٥ ، ٤ ، -٢)$

∴ $\text{جتا}\,\theta = \frac{(٥ ، -٤ ، -٢) \cdot (٥ ، ٤ ، -٢)}{\sqrt{٢٥ + ١٦ + ٤}\sqrt{٢٥ + ١٦ + ٤}} = \frac{١٣}{٤٥}$

∴ $\theta \simeq ٧٣^\circ \; ١٣'$.

٥١

$\overrightarrow{\text{وأ}} = (٢ ، ٢ ، ٢)$

$\overrightarrow{\text{حب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{ح}} = (٠ ، ٠ ، ٢) - (٢ ، ٢ ، ٠)$

$= (-٢ ، -٢ ، ٢)$

∴ $\frac{\overrightarrow{\text{وأ}} \cdot \overrightarrow{\text{حب}}}{\|\overrightarrow{\text{حب}}\|} = \frac{-٤ - ٤ + ٤}{\sqrt{١٢}} = \frac{-٢}{\sqrt{٣}}$

٥٢

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، ٠ ، \sqrt{٣})$

$\overrightarrow{\text{م}} = (٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})$ ، $\|\overrightarrow{\text{م}}\| = ٥$

المركبة الاتجاهية لـ $\overrightarrow{\text{أب}}$ فى اتجاه $\overrightarrow{\text{م}}$

$= \frac{\overrightarrow{\text{أب}} \cdot \overrightarrow{\text{م}}}{\|\overrightarrow{\text{م}}\|^٢}\,\overrightarrow{\text{م}} = \frac{٣ + ٠ + ٦}{٢٥}(٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})$

$= \frac{٩}{٢٥}(٣ ، ٢ ، ٢\sqrt{٣})$

$= \left(\frac{٢٧}{٢٥} ، \frac{١٨}{٢٥} ، \frac{١٨\sqrt{٣}}{٢٥}\right)$

٥٣

$\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، ٥ ، -٢)$

الشغل $= \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أب}} = (٤ ، -٦ ، ١٠) \cdot (١ ، ٥ ، -٢)$

$= ٤ - ٣٠ - ٢٠ = -٤٦$

٥٤

$\overrightarrow{\text{أب}} = (٥ ، -١ ، -٢)$

الشغل $= \overrightarrow{\text{ق}} \cdot \overrightarrow{\text{أب}} = (١ ، -٢ ، ٣) \cdot (٥ ، -١ ، -٢)$

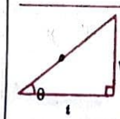
$= ٥ + ٢ - ٦ = ١$ جول.

٥٥

① $٥٠ \times ١٥ \times \text{جتا}\,١٨٠^\circ = -٧٥٠$ جول.

② $٥٠ \times ١٥ \times \text{جتا}\,٠^\circ = ٧٥٠$ جول.

٥٦



الشغل = ق × ف × جتا θ

$= ١٦٠ \times ٥ \times \frac{٤}{٥} = ٦٤٠$ جول.

٥٧

∵ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٠ ، ٠ ، ٥) - (٣ ، ٧ ، ٠)$

$= (-٣ ، -٧ ، ٥)$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}}\| = \sqrt{٨٣}$

∴ الشغل $= \|\overrightarrow{\text{ق}}\| \, \|\overrightarrow{\text{أب}}\| \, \text{جتا}\,٣٠^\circ$

$= ٢٠٠ \times \sqrt{٨٣} \times \frac{\sqrt{٣}}{٢} = ١٥٧٨$ جول.

٥٨

∵ $\overrightarrow{\text{بح}} = \overrightarrow{\text{ح}} - \overrightarrow{\text{ب}} = (٠ ، ١٢ ، ٠) - (٩ ، ٠ ، ٢٠)$

$= (-٩ ، ١٢ ، -٢٠)$

∴ متجه وحدة فى اتجاه $\overrightarrow{\text{بح}}$

$= \frac{(-٩ ، ١٢ ، -٢٠)}{\sqrt{(-٩)^٢ + (١٢)^٢ + (-٢٠)^٢}}$

$= \left(\frac{-٩}{٢٥} ، \frac{١٢}{٢٥} ، \frac{-٤}{٥}\right)$

∴ قوة الشد فى اتجاه $\overrightarrow{\text{بح}}$

$= ٥٠\left(\frac{-٩}{٢٥} ، \frac{١٢}{٢٥} ، \frac{-٤}{٥}\right) = (-١٨ ، ٢٤ ، -٤٠)$

، $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (٩ ، ٠ ، ٢٠) - (٩ ، ٠ ، ١٢)$

$= (٠ ، ٠ ، ٨)$

∴ الشغل المبذول من قوة الشد فى اتجاه $\overrightarrow{\text{بح}}$

لرفع الجسم من أ إلى ب

$\simeq (-١٨ ، ٢٤ ، -٤٠) \cdot (٠ ، ٠ ، ٨)$

$= -٣٢٠$ جول.

٥٩

① (ج) ② (ب) ③ (ج) ④ (ج)

⑤ (ج) ⑥ (أ) ⑦ (ب)

إرشادات لحل رقم ٥٩ :

① ∵ $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}\|^٢ = (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}})$

$.(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}})$

$= \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ح}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

$+ \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ح}}$

$+ \overrightarrow{\text{ح}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ح}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}} \cdot \overrightarrow{\text{ح}}$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ح}}\|^٢ + ٢\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$

$+ ٢\,\overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ح}} + ٢\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ح}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ح}}$ متعامدة مثنى مثنى

فإن $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \cdot \overrightarrow{\text{ح}} = \overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ح}} =$ صفر

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}\|^٢ = \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ح}}\|^٢$

$= (٢)^٢ + (٣)^٢ + (١٢)^٢ = ١٥٧$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ح}}\| = \sqrt{١٥٧}$

② ∵ $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ = ٣$

∴ $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) = ٣$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ + ٢\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٣$

، ∵ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \|\overrightarrow{\text{ب}}\| = ١$

∴ $٢\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٣ - ١ - ١ = ١$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = \frac{١}{٢}$

∴ $(٣\overrightarrow{\text{أ}} - ٤\overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (٢\overrightarrow{\text{أ}} + ٥\overrightarrow{\text{ب}}) = ٦\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢$

$+ ١٥\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} - ٨\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} - ٢٠\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$

$= ٦\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + ٧\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} - ٢٠\|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$

$= ٦ \times ١ + ٧ \times \frac{١}{٢} - ٢٠ \times ١ = \frac{-٢١}{٢}$

③ ∵ $\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ = ٩٠٠$

∴ $(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}) = ٩٠٠$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ - ٢\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٩٠٠$

∴ $١٢١ + ٥٢٩ - ٢\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = ٩٠٠$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} = -١٢٥$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ = (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}})$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + ٢(\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}) + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$

$= ١٢١ - ٢٥٠ + ٥٢٩ = ٤٠٠$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\| = ٢٠$

④ ∵ $\|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ = (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}})$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ - ٢\,\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ - ٢\|\overrightarrow{\text{أ}}\|\,\|\overrightarrow{\text{ب}}\|\,\text{جتا}\,\theta$

$= ١ + ١ - ٢ \times ١ \times ١\,\text{جتا}\,\theta$

$= ٢ - ٢\,\text{جتا}\,\theta$

، ∵ $\text{جتا}\,\theta \in [-١ ، ١]$

∴ $-٢\,\text{جتا}\,\theta \in [-٢ ، ٢]$

، $\overrightarrow{\text{ءب}} = (ل ، ل ، -ل)$

، ∵ $\overrightarrow{\text{حء}} \cdot \overrightarrow{\text{ءب}} = -٣٢$

∴ $-ل^٢ - ل^٢ = -٣٢$ ∴ $-٢ل^٢ = -٣٢$

∴ $ل^٢ = ١٦$ ∴ ل = ٤ وحدة طولية

∴ المساحة الكلية للمكعب $= ٦\,ل^٢ = ٦ \times (٤)^٢$

= ٩٦ وحدة مربعة.

٦٠

∵ متجه الوحدة في اتجاه ...

② الشرط اللازم لكى يكون $\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^٢ + \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$ هو وضع $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}} =$ صفر

، ∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \neq \overrightarrow{\text{ب}} \neq \overrightarrow{\text{و}}$ ∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ متعامدان

أى أن $\theta = ٩٠^\circ$

$\|\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢ = \|\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}\|^٢$

$(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}}) = (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot (\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ب}})$

② $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٤ & -١ & ٢ \\ ١ & ٠ & -٢ \end{vmatrix}$

$= (٢ - ٠)\,\overrightarrow{\text{س}} - (-٨ - ٢)\,\overrightarrow{\text{ص}} + (٠ + ١)\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= ٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ١٠\,\overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$

③ $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٥ & -٤ & ١ \end{vmatrix}$

٥٠

∴ إحداثيات النقطة أ (٠ ، ٦ ، ٧)

، إحداثيات النقطة ب (٥ ، ٢ ، ٥)

، إحداثيات النقطة حـ (٥ ، ١٠ ، ٥)

∴ أب = ب − أ = (٥ ، −٤ ، −٢)

، أحـ = حـ − أ = (٥ ، ٤ ، −٢)

∴ حتا θ = $\frac{(٥ ، −٤ ، −٢) . (٥ ، ٤ ، −٢)}{\sqrt{٢٥ + ١٦ + ٤}\ \sqrt{٢٥ + ١٦ + ٤}}$ = $\frac{١٣}{٤٥}$

∴ θ = ٧٣° ١٢َ

٥١

وأ = (٢ ، ٢ ، ٢)

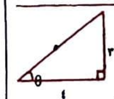
الشغل ... (−١ ، −٢)

٥٥

① ٥٠ × ١٥ × حتا ١٨٠° = −٧٥٠ جول.

② ٥٠ × ١٥ × حتا ٠° = ٧٥٠ جول.

٥٦



الشغل = ق × ف × حتا θ

= ١٦٠ × ٥ × $\frac{٤}{٥}$ = ٦٤٠ جول.

، أب = ب − أ = (٩ ، ٠ ، ٢٠) − (٩ ، ٠ ، ١٢)

= (٠ ، ٠ ، ٨)

∴ الشغل المبذول من قوة الشد فى اتجاه ب حـ لرفع الجسم من أ إلى ب

= (−١٨ ، ٢٤ ، −٤٠) . (٠ ، ٠ ، ٨)

= −٣٢٠ جول.

٥٦

① (جـ) ② (ب) ③ (جـ) ④ (جـ)

⑤ (جـ) ⑥ (أ) ⑦ (ب)

إرشادات لحل رقم ٥٦ :

① ∵ ‖أ + ب + حـ‖^2 = (أ + ب + حـ) . (أ + ب + حـ)

∴ (٢أ − ٤ب) . (٢أ + ٥ب) = ١٦ ‖أ‖

+ ١٥ أ . ب − ٨ أ . ب − ٢٠ ‖ب‖^2

= ٦ ‖أ‖^2 + ٧ أ . ب − ٢٠ ‖ب‖^2

= ٦ × ١ + ٧ × $\frac{١}{٢}$ − ٢٠ × ١ = $\frac{−٢١}{٢}$

③ ∵ ‖أ − ب‖^2 = ٩٠٠

∴ (أ − ب) . (أ − ب) = ٩٠٠

∴ ‖أ‖^2 + ‖ب‖^2 − ٢ أ . ب = ٩٠٠

∴ ١٢١ + ٥٢٩ − ٢ أ . ب = ٩٠٠

∴ أ . ب = −١٢٥

∴ ‖أ + ب‖^2 = (أ + ب) . (أ + ب)

= ‖أ‖^2 + ٢ (أ . ب) + ‖ب‖^2

= ١٢١ − ٢٥٠ + ٥٢٩ = ٤٠٠

∴ ‖أ + ب‖ = ٢٠

④ ∵ ‖أ − ب‖^2 = (أ − ب) . (أ − ب)

= ‖أ‖^2 − ٢ أ . ب + ‖ب‖^2

= ‖أ‖^2 + ‖ب‖^2 − ٢ ‖أ‖ ‖ب‖ حتا θ

= ١ + ١ − ٢ × ١ × ١ حتا θ

= ٢ − ٢ حتا θ

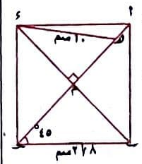
، ∵ حتا θ ∈ [−١ ، ١]

∴ −٢ حتا θ ∈ [−٢ ، ٢]

∴ ٢ − ٢ حتا θ ∈ [٠ ، ٤]

∴ ‖أ − ب‖^2 ∈ [٠ ، ٤]

⑤ ∵ ب ء = ب حـ $\sqrt{٢}$ = ١٦ سم



∴ ء م = ٨ سم

∴ هـ م = $\sqrt{(١٠)^2 − (٨)^2}$

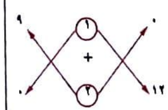
= ٦ سم

∴ أ هـ = ٨ − ٦ = ٢ سم

∴ حـ ب . أ هـ = ‖حـ ب‖ . ‖أ هـ‖ حتا ١٣٥°

= ٨ $\sqrt{٢}$ × ٢ × $\frac{−١}{\sqrt{٢}}$ = −١٦

⑥ ∵ معادلة أ ب هى :



$\frac{س}{١٢}$ + $\frac{ص}{٩}$ = ١

∴ أ = (١٢ ، ٠)

، ب = (٠ ، ٩)

، ∵ حـ تقسم ب أ من الداخل بنسبة ١ : ٢

∴ حـ = ($\frac{١ × ١٢ + ٢ × ٠}{١ + ٢}$ ، $\frac{١ × ٠ + ٢ × ٩}{١ + ٢}$)

= (٤ ، ٦)

∴ حـ و . حـ أ = (−٤ ، −٦) . (٨ ، −٦) = ٤

⑦ ∵ ب = (ل ، ل ، ل)

، ب = (ل ، ل ، ٠) ، حـ = (ل ، ٠ ، ٠)

، ء = (٠ ، ٠ ، ل)

∴ حـ ء . (−ل ، ٠ ، ل)

، ء ب = (ل ، ل ، −ل)

، ∵ حـ ء . ء ب = −٣٢

∴ −ل^2 − ل^2 = −٣٢ ∴ −٢ ل^2 = −٣٢

∴ ل^2 = ١٦ ∴ ل = ٤ وحدة طولية

∴ المساحة الكلية للمكعب = ٦ ل^2 = ٦ × (٤)^2

= ٩٦ وحدة مربعة.

٦٠

∵ متجه الوحدة فى اتجاه أ هو ى$_{أ}$ = $\frac{أ}{‖أ‖}$

= ($\frac{٢}{٧}$ ، $\frac{−٣}{٧}$ ، $\frac{٦}{٧}$)

، متجه الوحدة فى اتجاه ب هو ى$_{ب}$ = $\frac{ب}{‖ب‖}$

= ($\frac{−١}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{−٢}{٣}$)

∴ ى$_{أ}$ + ى$_{ب}$ يمثل متجه ينصف الزاوية بين المتجهين أ ، ب

∴ حـ = ك (ى$_{أ}$ + ى$_{ب}$)

= ك ($\frac{٢}{٧}$ − $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{−٣}{٧}$ + $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٦}{٧}$ − $\frac{٢}{٣}$)

= ك ($\frac{−١}{٢١}$ ، $\frac{٥}{٢١}$ ، $\frac{٤}{٢١}$)

، ∵ ‖حـ‖ = ٣ $\sqrt{٤٢}$

∴ $\frac{ك}{٢١}$ $\sqrt{(−١)^2 + (٥)^2 + (٤)^2}$ = ٣ $\sqrt{٤٢}$

∴ ك = ٦٣ ∴ حـ = (−٣ ، ١٥ ، ١٢)

٦١

∵ ‖أ + ب‖^2 = (أ + ب) . (أ + ب)

= ‖أ‖^2 + ‖ب‖^2 + ٢ أ . ب

= ‖أ‖^2 + ‖ب‖^2 + ٢ ‖أ‖ ‖ب‖ حتا θ

① الشرط اللازم لكى يكون ‖أ + ب‖ = ‖أ‖ + ‖ب‖ هو وضع θ = صفر

أى أن «أ ، ب لهما نفس الاتجاه»

∴ ‖أ + ب‖^2 = ‖أ‖^2 + ‖ب‖^2 + ٢ ‖أ‖ . ‖ب‖

= (‖أ‖ + ‖ب‖)^2

∴ ‖أ + ب‖ = ‖أ‖ + ‖ب‖

② الشرط اللازم لكى يكون ‖أ + ب‖^2 = ‖أ‖^2 + ‖ب‖^2 هو وضع أ . ب = صفر

، ∵ أ ≠ ب ≠ و ∴ أ ، ب متعامدان

أى أن θ = ٩٠°

٦٢

∵ ‖أ + ب‖^2 = ‖أ − ب‖^2

∴ (أ + ب) . (أ + ب) = (أ − ب) . (أ − ب)

∴ ‖أ‖^2 + ٢ أ . ب + ‖ب‖^2

= ‖أ‖^2 − ٢ أ . ب + ‖ب‖^2

∴ ٤ أ . ب = ٠ ∴ أ . ب = ٠ ∴ أ ⊥ ب

حلول تمارين 4

١

‖أ × ب‖ = ‖أ‖ ‖ب‖ حا θ = ٨ × ٥ × حا ١٢٠°

= ٢٠ $\sqrt{٣}$

٢

أ × ب = ‖أ‖ ‖ب‖ حا θ (± ى)

= ± ٥ × ٨,٥ حا ٣٠° ى = ± ٢١,٢٥ ى

٣

∵ ‖أ × ب‖ = ‖أ‖ ‖ب‖ حا θ

∴ ٦٥ = ٥ × ٢٦ × حا θ

∴ حا θ = $\frac{١}{٢}$ ∴ θ = ٣٠° أو ١٥٠°

٤

① أ × ب = $\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ −٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ٣ & −٤ \end{vmatrix}$

= (−١٢ − ٣) س − (٨ − ١) ص + (−٦ − ٣) ع

= −١٥ س − ٧ ص − ٩ ع

② أ × ب = $\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٤ & −١ & ٢ \\ ١ & ٠ & −٢ \end{vmatrix}$

= (٢ − ٠) س − (−٨ − ٢) ص + (٠ + ١) ع

= ٢ س + ١٠ ص + ع

③ أ × ب = $\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ٥ & −٤ & ١ \\ −٢ & ١ & −٣ \end{vmatrix}$

= (١٢ − ١) س − (−١٥ + ٢) ص + (٥ − ٨) ع

= ١١ س + ١٣ ص − ٣ ع

④ أ × ب = $\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ −١ & −٢ & ٠ \\ ٠ & ٣ & −٥ \end{vmatrix}$

= (١٠ + ٠) س − (٥ − ٠) ص + (−٣ − ٠) ع

= ١٠ س − ٥ ص − ٣ ع

٥

① أ × ب = $\begin{vmatrix} س & ص & ع \\ ١ & ١ & −٢ \\ ٣ & −٢ & ٥ \end{vmatrix}$

= (٥ − ٤) س − (٥ + ٦) ص + (−٢ − ٣) ع

= س − ١١ ص − ٥ ع

② ٢ أ × ٣ ب = ٦ (أ × ب)

= ٦ (س − ١١ ص − ٥ ع)

= ٦ س − ٦٦ ص − ٣٠ ع

③ أ × (أ − ٢ ب) = أ × أ − ٢ أ × ب

= و − ٢ (س − ١١ ص − ٥ ع)

= −٢ س + ٢٢ ص + ١٠ ع

٦

ب × أ =

س	ص	ع
١	٠	٢-
٤	٢	١

= (٠ + ٦) س − (١ + ٨) ص + (٢ − ٠) ع

= ٦ س − ٩ ص + ٢ ع

∴ ‖ ٢ ب × أ ‖ = ٢ × ‖ ب × أ ‖

= ٢ × ٣ √١٤ = ٦ √١٤

٧

أ × ب =

س	ص	ع
٣	٤-	٥
١	١-	١

= (−٤ + ٥) س − (٣ − ٥) ص + (−٣ + ٤) ع

= س + ٢ ص + ع

‖ أ ‖ = ٥ √٢ ‖ ب ‖ = √٣

، ‖ أ × ب ‖ = √٦

∴ جا θ = ‖ أ × ب ‖ / (‖ أ ‖ ‖ ب ‖) = √٦ / (٥ √٢ × √٣) = ١/٥

٨

① أ × ب =

س	ص	ع
٢	٣	٠
١-	٣	١

= (٣ − ٠) س − (٢ − ٠) ص + (٦ + ٣) ع

= ٣ س − ٢ ص + ٩ ع

② حـ × حـ = و

③ (أ − ب) × (حـ − أ)

= (٣ ، ٠ ، −١) × (−١ ، −١ ، ٥)

=

س	ص	ع
٣	٠	١-
١-	١-	٥

= (٠ − ١) س − (١٥ − ١) ص + (−٣ − ٠) ع

= − س − ١٤ ص − ٣ ع

٩

① (أ) ② (أ) ③ (جـ) ④ (أ)

⑤ (ب) ⑥ (ب) ⑦ (ب) ⑧ (جـ)

⑨ (د) ⑩ (ب) ⑪ (ب) ⑫ (د)

⑬ (د) ⑭ (ب)

١٠

أولًا نوجد : (١ ، −٢ ، ٣) × (٢ ، ١ ، −٣)

=

س	ص	ع
١	٢-	٣
٢	١	٣-

= (٦ − ٣) س − (−٣ − ٦) ص + (١ + ٤) ع

= ٣ س + ٩ ص + ٥ ع

ثم نوجد (٣ ، ٩ ، ٥) × (−٣ ، ١ ، ٢)

=

س	ص	ع
٣	٩	٥
٣-	١	٢

= (١٨ − ٥) س − (٦ + ١٥) ص + (٣ + ٢٧) ع

= ١٣ س − ٢١ ص + ٣٠ ع

١١

أ = ‖ أ ‖ × ى_أ = ٦ (٢/٣ ، −٢/٣ ، ١/٣) = (٤ ، −٤ ، ٢)

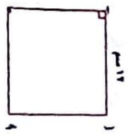
أ × ب =

س	ص	ع
٤	٤-	٢
٢-	٣	٥

= (−٢٠ − ٦) س − (٢٠ + ٤) ص + (١٢ − ٨) ع

= −٢٦ س − ٢٤ ص + ٤ ع

١٢



(أ) أ ب × أ حـ

= ‖ أ ب ‖ ‖ أ حـ ‖ جا ١٣٥° ى

= (١٢ × ١٢ √٢ × ١/√٢) ى

= ١٤٤ ى

(ب) ب د × أ حـ = ‖ ب د ‖ ‖ أ حـ ‖ جا ٩٠° ى

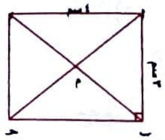
= (١٢ √٢ × ١٢ √٢ × ١) ى = ٢٨٨ ى

(جـ) أ ب × ب حـ

= ‖ أ ب ‖ ‖ ب حـ ‖ جا ٩٠° (− ى)

= −١٢ × ١٢ × ١ ى = −١٤٤ ى

١٣



① أ ب × أ حـ

= ‖ أ ب ‖ ‖ أ حـ ‖

جا (د ب أ حـ) (− ى)

= (−٣ × ٥ × ٤/٥) ى = −١٢ ى

② أ د × ب حـ = ‖ أ د ‖ ‖ ب حـ ‖ جا ٠° ى = و

③ أ ب × ب د = − ب أ × ب د

= − ‖ ب أ ‖ ‖ ب د ‖ جا (د أ ب د) ى

= (−٣ × ٥ × ٤/٥) ى = −١٢ ى

④ حـ م × حـ ب

= ‖ حـ م ‖ ‖ حـ ب ‖ جا (د أ حـ ب) (− ى)

= (−٥/٢ × ٤ × ٣/٥) ى = −٦ ى

⑤ أ ب × حـ ب = ‖ أ ب ‖ ‖ حـ ب ‖ جا ٩٠° ى

= (٣ × ٤ × ١) ى = ١٢ ى

⑥ د م × د حـ = ‖ د م ‖ ‖ د حـ ‖ جا (د م د حـ) (− ى)

= (−٥/٢ × ٣ × ٤/٥) ى = −٦ ى

١٤

① أ × ب =

س	ص	ع
٤	٦-	٢
٢-	٤	٦-

= (٣٦ − ٨) س − (−٢٤ + ٤) ص + (١٦ − ١٢) ع

= ٢٨ س + ٢٠ ص + ٤ ع

∴ ‖ أ × ب ‖ = ٢٠ √٣

∴ ى = ± (أ × ب) / ‖ أ × ب ‖

= ± (٧√٣/١٥ س + √٣/٣ ص + √٣/١٥ ع)

② أ × ب =

س	ص	ع
١	٢-	٢
٣	٤-	٠

= (٠ + ٨) س − (٠ − ٦) ص + (−٤ + ٦) ع

= ٨ س + ٦ ص + ٢ ع

∴ ‖ أ × ب ‖ = ٢ √٢٦

∴ ى = ± (أ × ب) / ‖ أ × ب ‖

= ± (٤/√٢٦ س + ٣/√٢٦ ص + ١/√٢٦ ع)

١٥

أ ب = ب − أ = (١ ، ٠ ، ٠) − (٠ ، ٠ ، ١) = (١ ، ٠ ، −١)

ب حـ = حـ − ب = (٠ ، ١ ، ٠) − (١ ، ٠ ، ٠) = (−١ ، ١ ، ٠)

أ ب × ب حـ =

س	ص	ع
١	٠	١-
١-	١	٠

= (٠ + ١) س − (٠ − ١) ص + (١ − ٠) ع

= س + ص + ع

∴ ‖ أ ب × ب حـ ‖ = √٣

∴ ى = ± (١ ، ١ ، ١)/√٣ = ± (١/√٣ ، ١/√٣ ، ١/√٣)

١٦

أ ب = ب − أ = (١ ، ١ ، −٣)

ب حـ = حـ − ب = (−٢ ، ٢ ، ٢)

أ ب × ب حـ =

س	ص	ع
١	١	٣-
٢-	٢	

= (٢ + ٦) س − (٢)

= ٨ س + ٤ ص

ى = ± (٨

١٩

س	ص	ع
٢	٦	٢٧-
١		

= (٠ + ١٠) س − (٨ − ١٥) ص + (−٤ − ٠) ع

= ١٠ س + ٧ ص − ٤ ع

∴ مساحة متوازي الأضلاع

= ‖ ل م × ل ى ‖ = √٦٦

③ أ ب = ب − أ = (−٢ ، −٢ ، −٣)

، أ حـ = حـ − أ = (−١ ، −١ ، −١)

∴ أ ب × أ حـ =

س	ص	ع
٢-	٢-	٣-
١-	١-	١-

= ١/٢ ‖ أ ب × أ حـ ‖

= ١/٢ √٢ وحدة مساحة.

٢٢

$= (\cdot - 1)\,\overrightarrow{\text{س}} - \ldots$

$= -\overrightarrow{\text{س}} - 14\,\overrightarrow{\text{ص}} - 3\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= -26\,\overrightarrow{\text{س}} - 24\,\overrightarrow{\text{ص}} + 4\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= -\|\overrightarrow{\text{أب}}\|\,\|\overrightarrow{\text{بد}}\|\ \text{جا}\ (\ldots)$

$= (-3 \times 5 \times \frac{4}{5})\,\vec{\text{ى}} = -12\,\vec{\text{ى}}$

④ $\overrightarrow{\text{حـم}} \times \overrightarrow{\text{حـب}} = \|\overrightarrow{\text{حـم}}\|\,\|\overrightarrow{\text{حـب}}\|\ \text{جا}\ (\text{د أحـب})\ (-\vec{\text{ى}})$

$= (-\frac{5}{2} \times 4 \times \frac{3}{5})\,\vec{\text{ى}} = -6\,\vec{\text{ى}}$

⑤ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{حـب}} = \|\overrightarrow{\text{أب}}\|\,\|\overrightarrow{\text{حـب}}\|\ \text{جا}\ 90^\circ\ \vec{\text{ى}}$

$= (3 \times 4 \times 1)\,\vec{\text{ى}} = 12\,\vec{\text{ى}}$

⑥ $\overrightarrow{\text{دم}} \times \overrightarrow{\text{دحـ}} = \|\overrightarrow{\text{دم}}\|\,\|\overrightarrow{\text{دحـ}}\|\ \text{جا}\ (\text{د م د حـ})\ (-\vec{\text{ى}})$

$= (-\frac{5}{2} \times 3 \times \frac{4}{5})\,\vec{\text{ى}} = -6\,\vec{\text{ى}}$

$\overrightarrow{\text{بحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{ب}} = \ldots$

$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{بحـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

$= (0 + 1)\,\overrightarrow{\text{س}} - (0 - 1)\,\overrightarrow{\text{ص}} + (1 - 0)\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= \overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{بحـ}}\| = \sqrt{3}$

$\therefore \vec{\text{ى}} = \pm \frac{(1 ، 1 ، 1)}{\sqrt{3}} = \pm \left(\frac{1}{\sqrt{3}} ، \frac{1}{\sqrt{3}} ، \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

16

$\overrightarrow{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}} = (1 ، 1 ، -3)$

$\overrightarrow{\text{بحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{ب}} = (-2 ، 2 ، 2)$

$\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{بحـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= (2 + 6)\,\overrightarrow{\text{س}} - (2 - 6)\,\overrightarrow{\text{ص}} + (2 + 2)\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= 8\,\overrightarrow{\text{س}} + 4\,\overrightarrow{\text{ص}} + 4\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\vec{\text{ى}} = \pm \frac{(8 ، 4 ، 4)}{4\sqrt{6}} = \pm \left(\frac{2}{\sqrt{6}} ، \frac{1}{\sqrt{6}} ، \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

$\therefore \vec{\text{د}} = \text{ك} \left(\frac{2}{\sqrt{6}} ، \frac{1}{\sqrt{6}} ، \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ حيث ك $\in$ ح* هو أى متجه عمودى على المستوى الذى يحوى أ ، ب ، حـ

17

$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 5 & -2 \end{vmatrix}$

$= (-2 + 20)\,\overrightarrow{\text{س}} - (-6 + 24)\,\overrightarrow{\text{ص}} + (15 - 6)\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= 18\,\overrightarrow{\text{س}} - 18\,\overrightarrow{\text{ص}} + 9\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\vec{\text{ى}} = \pm \frac{(18 ، -18 ، 9)}{27} = \pm \left(\frac{2}{3} ، \frac{-2}{3} ، \frac{1}{3}\right)$

$\therefore$ المتجه هو : $\pm 3 \left(\frac{2}{3} ، \frac{-2}{3} ، \frac{1}{3}\right) = \pm (2 ، -2 ، 1)$

18

$\because \vec{\text{أ}} \cdot (\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ صفر

$\therefore \vec{\text{أ}} \perp \vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$

، $\because \vec{\text{ب}} \cdot (\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$ صفر

$\therefore \vec{\text{ب}} \perp \vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}$

19

$\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ 2 & 6 & -27 \\ 1 & \text{ل} & \text{م} \end{vmatrix} = \vec{\text{و}}$

$(6\text{م} + 27\text{ل})\,\overrightarrow{\text{س}} - (2\text{م} + 27)\,\overrightarrow{\text{ص}}$

$+ (2\text{ل} - 6)\,\overrightarrow{\text{ع}} = \vec{\text{و}}$

$\therefore 2\text{ل} - 6 = 0 \qquad \therefore \text{ل} = 3$

$، 2\text{م} + 27 = 0 \qquad \therefore \text{م} = \frac{-27}{2}$

20

① $\overrightarrow{\text{لم}} = \vec{\text{م}} - \vec{\text{ل}} = (1 ، 2)$

$، \overrightarrow{\text{نم}} = \vec{\text{م}} - \vec{\text{ن}} = (-3 ، -1)$

$\therefore \overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{نم}} = (1 ، 2) \times (-3 ، -1)$

$= (-1 + 6)\,\overrightarrow{\text{ع}} = 5\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة متوازى الأضلاع $= \|\overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{نم}}\|$

$= 5$ وحدة مساحة.

② $\overrightarrow{\text{لم}} = \vec{\text{م}} - \vec{\text{ل}} = (-1 ، 3 ، 2)$

$، \overrightarrow{\text{نم}} = \vec{\text{م}} - \vec{\text{ن}} = (-1 ، -1 ، 2)$

$\therefore \overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{نم}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 8\,\overrightarrow{\text{س}} + 4\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة متوازى الأضلاع $= \|\overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{نم}}\|$

$= \sqrt{8^2 + 4^2}$

$= 4\sqrt{5}$ وحدة مساحة.

③ $\overrightarrow{\text{لم}} = \vec{\text{م}} - \vec{\text{ل}} = (-2 ، 0 ، -5)$

$، \overrightarrow{\text{نم}} = \vec{\text{م}} - \vec{\text{ن}} = (-3 ، 2 ، -4)$

$\therefore \overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{نم}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -2 & 0 & -5 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= (0 + 10)\,\overrightarrow{\text{س}} - (8 - 15)\,\overrightarrow{\text{ص}} + (-4 - 0)\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$= 10\,\overrightarrow{\text{س}} + 7\,\overrightarrow{\text{ص}} - 4\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة متوازى الأضلاع

$= \|\overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{نم}}\| = \sqrt{165}$ وحدة مساحة.

④ $\overrightarrow{\text{لم}} = \vec{\text{م}} - \vec{\text{ل}} = (2 ، 4 ، 0)$

$، \overrightarrow{\text{نم}} = \vec{\text{م}} - \vec{\text{ن}} = (-3 ، 2 ، -4)$

$\therefore \overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{نم}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ 2 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= -16\,\overrightarrow{\text{س}} + 8\,\overrightarrow{\text{ص}} + 16\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة متوازى الأضلاع

$= \|\overrightarrow{\text{لم}} \times \overrightarrow{\text{نم}}\| = 24$ وحدة مساحة.

21

① $\overrightarrow{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}} = (-1 ، -5 ، 5)$

$، \overrightarrow{\text{أحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{أ}} = (-3 ، 3 ، 2)$

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -1 & -5 & 5 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix}$

$= -25\,\overrightarrow{\text{س}} - 13\,\overrightarrow{\text{ص}} - 18\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة Δ أبحـ $= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}}\|$

$\simeq 16.7$ وحدة مساحة.

② $\overrightarrow{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}} = (-2 ، 1 ، 3)$

$، \overrightarrow{\text{أحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{أ}} = (-5 ، 0 ، -3)$

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -2 & 1 & 3 \\ -5 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

$= -3\,\overrightarrow{\text{س}} - 21\,\overrightarrow{\text{ص}} + 5\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة Δ أبحـ $= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}}\|$

$= \frac{5}{2}\sqrt{19}$ وحدة مساحة.

③ $\overrightarrow{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}} = (-2 ، -2 ، -3)$

$، \overrightarrow{\text{أحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{أ}} = (-1 ، -1 ، -1)$

$\therefore \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$

$= -\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}}$

$\therefore$ مساحة Δ أبحـ $= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}}\|$

$= \frac{1}{2}\sqrt{2}$ وحدة مساحة.

22

$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix}$

$= -9\,\overrightarrow{\text{س}} + 3\,\overrightarrow{\text{ص}} - 15\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة متوازى الأضلاع

$= \|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\| = 3\sqrt{35}$ وحدة مساحة.

23

$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{vmatrix}$

$= -8\,\overrightarrow{\text{س}} + 12\,\overrightarrow{\text{ص}} + 6\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة متوازى الأضلاع

$= \|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\| = 2\sqrt{61}$ وحدة مساحة.

24

$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ [illegible] & [illegible] & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$

$= -2\,\overrightarrow{\text{س}} - 14\,\overrightarrow{\text{ص}} - 10\,\overrightarrow{\text{ع}}$

$\therefore$ مساحة $\Delta = \frac{1}{2} \|\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}\| = 5\sqrt{3}$ وحدة مساحة.

٢٥

$$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$= [illegible]\,\overline{\text{س}} + \overline{\text{ص}} + 0\,\overline{\text{ع}}$

مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \| \vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} \| = \frac{1}{2}\sqrt{14}$ وحدة مساحة.

٢٦

① $\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}} = (0, 2, 3) \cdot (3, 0, -4) \neq$ صفر

∴ المتجهان غير متعامدين.

، ∵ $\frac{\text{صفر}}{3} \neq \frac{2}{\text{صفر}} \neq \frac{3}{-4}$

∴ المتجهان غير متوازيين.

② $\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}} = (-2, 1, -2) \cdot (8, -4, 8) \neq$ صفر

∴ المتجهان غير متعامدين.

، ∵ $\frac{-2}{8} = \frac{1}{-4} = \frac{-2}{8}$

∴ المتجهان متوازيان.

٢٧

$\overline{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}} = (2, -14, 2)$

$\overline{\text{أحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{أ}} = (-2, 14, -2)$

∵ $\frac{2}{-2} = \frac{-14}{14} = \frac{2}{-2} = -1$

∴ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

حل آخر:

$\overline{\text{أب}} \times \overline{\text{أحـ}} = \vec{\text{و}}$ ∴ أ ، ب ، حـ على استقامة واحدة.

٢٨

∵ $\vec{\text{أ}} \parallel \vec{\text{ب}}$ ∴ $\frac{\text{أ}_{\text{س}}}{\text{ب}_{\text{س}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ص}}}{\text{ب}_{\text{ص}}} = \frac{\text{أ}_{\text{ع}}}{\text{ب}_{\text{ع}}}$

$\frac{1}{\text{ل}} = \frac{6}{3} = \frac{2}{\text{م}}$ ∴ $\text{ل} = \frac{1}{2}$ ، $\text{م} = 1$

∴ $\vec{\text{حـ}} = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

∴ $\| \vec{\text{حـ}} \| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$

٢٩

① $\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ 2 & 3 & 0 \\ \text{م} & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= (4 - 3\text{م})\,\overline{\text{ع}} = -5\,\overline{\text{ع}}$

∴ $4 - 3\text{م} = -5$ ∴ $\text{م} = 3$

② $\vec{\text{أ}} \perp \vec{\text{ب}}$ عندما $\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}} =$ صفر

∴ $(2, 3, 0) \cdot (\text{م}, 2, 0) = 0$

∴ $2\text{م} + 6 = 0$ ∴ $\text{م} = -3$

③ $\| \vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} \| = \vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}}$

$\| (4 - 3\text{م})\,\overline{\text{ع}} \| = 2\text{م} + 6$

$|4 - 3\text{م}| = 2\text{م} + 6$ ∴ $|3\text{م} - 4| = 2\text{م} + 6$

عند $\text{م} \geq \frac{4}{3}$ ∴ $3\text{م} - 4 = 2\text{م} + 6$

∴ $\text{م} = 10$

عند $\text{م} < \frac{4}{3}$ ∴ $-3\text{م} + 4 = 2\text{م} + 6$

∴ $\text{م} = -\frac{2}{5}$

٣٠

$\| \vec{\text{أ}} \| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

$\vec{\text{ى}}_{\text{أ}} = \frac{(2, -3)}{\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3)$ ، ∵ $\vec{\text{ب}} \parallel \vec{\text{أ}}$

∴ $\vec{\text{ب}} = \| \vec{\text{ب}} \| \times \pm \vec{\text{ى}}_{\text{أ}}$

$= \pm 3\sqrt{13} \times \frac{1}{\sqrt{13}}(2, -3) = \pm(6, -9)$

٣١

① $\overline{\text{أب}} = \vec{\text{ب}} - \vec{\text{أ}} = (3, 2, 3)$

$\overline{\text{بحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{ب}} = (-2, 2, 0)$

$\overline{\text{ءحـ}} = \vec{\text{حـ}} - \vec{\text{ء}} = (3, 2, 3)$

$\overline{\text{أء}} = \vec{\text{ء}} - \vec{\text{أ}} = (-2, 2, 0)$

∴ $\overline{\text{أب}} = \overline{\text{ءحـ}}$ ، $\overline{\text{بحـ}} = \overline{\text{أء}}$

∴ أبحـء متوازي أضلاع

$\overline{\text{أب}} \times \overline{\text{أء}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ 3 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$= -6\,\overline{\text{س}} - 6\,\overline{\text{ص}} + 10\,\overline{\text{ع}}$

∴ مساحة متوازي الأضلاع $= \| \overline{\text{أب}} \times \overline{\text{أء}} \|$

$= \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2 + (10)^2}$

$= 2\sqrt{43}$ وحدة مساحة

② متجه الوحدة العمودي على مستوى المتوازي الأضلاع

$= \frac{\overline{\text{أب}} \times \overline{\text{أء}}}{\| \overline{\text{أب}} \times \overline{\text{أء}} \|} = \pm\left(\frac{-6}{2\sqrt{43}}, \frac{-6}{2\sqrt{43}}, \frac{10}{2\sqrt{43}}\right)$

$= \pm\left(\frac{-3}{\sqrt{43}}, \frac{-3}{\sqrt{43}}, \frac{5}{\sqrt{43}}\right)$

٣٢

① (ب)	② (أ)	③ (ب)	④ (ب)
⑤ (ب)	⑥ (د)	⑦ (جـ)	⑧ (د)
⑨ (د)	⑩ (د)	⑪ (أ)	⑫ (ب)
⑬ (جـ)	⑭ (جـ)	⑮ (جـ)	⑯ (أ)
⑰ (د)	⑱ (د)	⑲ (ب)	⑳ (جـ)
㉑ (ب)	㉒ (أ)	㉓ (أ)	㉔ (د)

٣٣

$\vec{\text{أ}} \cdot \vec{\text{ب}} \times \vec{\text{حـ}} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 9$

٣٤

$\vec{\text{ب}} \cdot \vec{\text{حـ}} \times \vec{\text{أ}} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -10$

٣٥

① $\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{حـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6\,\overline{\text{ص}} - 6\,\overline{\text{ع}}$

$\vec{\text{أ}} \times (\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{حـ}}) = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & -6 & -6 \end{vmatrix}$

$= 30\,\overline{\text{س}} + 12\,\overline{\text{ص}} - 12\,\overline{\text{ع}}$

$\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ 2 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$

$= 6\,\overline{\text{س}} + 5\,\overline{\text{ص}} + 8\,\overline{\text{ع}}$

$(\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) \times \vec{\text{حـ}} = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ 6 & 5 & 8 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= 24\,\overline{\text{ص}} - 15\,\overline{\text{ع}}$

∴ $\vec{\text{أ}} \times (\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{حـ}}) \neq (\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) \times \vec{\text{حـ}}$

② ∵ $(\vec{\text{أ}} \times \vec{\text{ب}}) \times \vec{\text{حـ}} = 24\,\overline{\text{ص}} - 15\,\overline{\text{ع}}$

$(\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{أ}}) = (-6, -5, -8)$

$\vec{\text{حـ}} \times (\vec{\text{ب}} \times \vec{\text{أ}}) = \begin{vmatrix} \overline{\text{س}} & \overline{\text{ص}} & \overline{\text{ع}} \\ 3 & 0 & 0 \\ -6 & -5 & -8 \end{vmatrix}$

$= 24\,\overline{\text{ص}} - 15\,\overline{\text{ع}}$

$\begin{vmatrix} -٦ & -٥ & -٨ \end{vmatrix}$

$= ٢٤\,\overline{ص} - ١٥\,\overline{ع}$

$\vec{أ} \cdot \overline{ب} \times \overline{ح} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٤ \\ ٥ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = ٩$

∵ $\vec{أ} \parallel \overline{ب}$ ∴ $\frac{أ_س}{ب_س} = \frac{أ_ص}{ب_ص} = \frac{أ_ع}{ب_ع}$

$\frac{١}{ك} = \frac{٦}{٣} = \frac{٢}{م}$ ∴ $ك = \frac{١}{٢}$ ، $م = ١$

∴ $(\vec{أ} \times \overline{ب}) \times \overline{ح} \neq \vec{أ} \times (\overline{ب} \times \overline{ح})$

③ ∵ $\vec{أ} \cdot \overline{ب} \times \overline{ح} = \begin{vmatrix} ٢ & -٤ & ١ \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٣ & ٠ & ٠ \end{vmatrix} = ١٨$

، $\overline{ب} \cdot \overline{ح} \times \vec{أ} = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & -٢ \\ ٣ & ٠ & ٠ \\ ٢ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = ١٨$

∴ $\vec{أ} \cdot \overline{ب} \times \overline{ح} = \overline{ب} \cdot \overline{ح} \times \vec{أ}$

٣٦

$\vec{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ٢ & ٣ & -١ \\ -١ & ٢ & -٤ \end{vmatrix}$

$= (-١٢ + ٢)\,\overline{س} - (-٨ - ١)\,\overline{ص} + (٤ + ٣)\,\overline{ع}$

$= -١٠\,\overline{س} + ٩\,\overline{ص} + ٧\,\overline{ع}$

، $\vec{أ} \times \overline{ح} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ٢ & ٣ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

$= (٣ + ١)\,\overline{س} - (٢ + ١)\,\overline{ص} + (٢ - ٣)\,\overline{ع}$

$= ٤\,\overline{س} - ٣\,\overline{ص} - \overline{ع}$

∴ $(\vec{أ} \times \overline{ب}) \cdot (\vec{أ} \times \overline{ح}) = (-١٠ ، ٩ ، ٧) \cdot (٤ ، -٣ ، -١)$

$= -٤٠ - ٢٧ - ٧ = -٧٤$

٣٧

$\vec{أ} \cdot \overline{ب} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٣}{٧} + \frac{٣}{٧} \times \frac{-٦}{٧} + \frac{٦}{٧} \times \frac{٢}{٧} =$ صفر

∴ $\vec{أ} \perp \overline{ب}$

، $\vec{أ} \cdot \overline{ح} = \frac{٢}{٧} \times \frac{٦}{٧} + \frac{٣}{٧} \times \frac{٢}{٧} + \frac{٦}{٧} \times \frac{-٣}{٧} =$ صفر

∴ $\vec{أ} \perp \overline{ح}$

، $\overline{ب} \cdot \overline{ح} = \frac{٣}{٧} \times \frac{٦}{٧} + \frac{-٦}{٧} \times \frac{٢}{٧} + \frac{٢}{٧} \times \frac{-٣}{٧} =$ صفر

∴ $\overline{ب} \perp \overline{ح}$

، $\|\vec{أ}\| = ١$ ، $\|\overline{ب}\| = ١$ ، $\|\overline{ح}\| = ١$

∴ $\vec{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{ح}$ متجهات وحدة متعامدة مثنى مثنى

$\vec{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ \frac{٢}{٧} & \frac{٣}{٧} & \frac{٦}{٧} \\ \frac{٣}{٧} & \frac{-٦}{٧} & \frac{٢}{٧} \end{vmatrix}$

$= \left(\frac{٦}{٤٩} + \frac{٣٦}{٤٩}\right)\overline{س} - \left(\frac{٤}{٤٩} - \frac{١٨}{٤٩}\right)\overline{ص}$

$+ \left(\frac{-١٢}{٤٩} - \frac{٩}{٤٩}\right)\overline{ع}$

$= \frac{٦}{٧}\,\overline{س} + \frac{٢}{٧}\,\overline{ص} - \frac{٣}{٧}\,\overline{ع} = \overline{ح}$

٣٨

$\vec{أ} + \overline{ح} = (-١ ، -٢ ، ١) + (٠ ، ١ ، -١)$

$= (-١ ، -١ ، ٠)$

$\vec{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ -١ & -٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

$= -٢\,\overline{س} + ٤\,\overline{ص} + ٦\,\overline{ع}$

$\overline{ب} \times \overline{ح} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ٣ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & -١ \end{vmatrix}$

$= -\overline{س} + ٣\,\overline{ص} + ٣\,\overline{ع}$

$(\vec{أ} \times \overline{ب}) \times (\overline{ب} \times \overline{ح}) = (-٢ ، ٤ ، ٦) \times (-١ ، ٣ ، ٣)$

$= \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ -٢ & ٤ & ٦ \\ -١ & ٣ & ٣ \end{vmatrix} = -٦\,\overline{س} - ٢\,\overline{ع}$

∴ $(\vec{أ} + \overline{ح}) \cdot [(\vec{أ} \times \overline{ب}) \times (\overline{ب} \times \overline{ح})]$

$= (-١ ، -١ ، ٠) \cdot (-٦ ، ٠ ، -٢) = ٦$

٣٩

∵ $\vec{أ} \cdot \overline{ب} \times \overline{ح} = \begin{vmatrix} ٣ & -٤ & ١ \\ ٠ & ٢ & -٣ \\ ٣ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٦٠$

∴ حجم متوازى السطوح = $|٦٠| = ٦٠$ وحدة حجم.

٤٠

∵ $\vec{أ} \cdot \overline{ب} \times \overline{ح} = \begin{vmatrix} -٣ & ٧ & ٥ \\ -٥ & ٧ & -٣ \\ ٧ & -٥ & -٣ \end{vmatrix} = -٢٦٤$

∴ حجم متوازى السطوح = $|-٢٦٤|$

= ٢٦٤ وحدة حجم.

٤١

① ∵ $\vec{أ} \cdot \overline{ب} \times \overline{ح} = \begin{vmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ -٣ & ٢ & ١ \\ -١ & ١ & ٤ \end{vmatrix} = ٤٩$

∴ حجم متوازى السطوح = ٤٩ وحدة حجم

② ∵ $\vec{أ} \times \overline{ب} = \begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ١ & ٤ & ٢ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix}$

$= -٧\,\overline{ص} + ١٤\,\overline{ع}$

∴ $\|\vec{أ} \times \overline{ب}\| = \sqrt{٤٩ + ١٩٦} = ٧\sqrt{٥}$ وحدة مساحة

∴ مساحة القاعدة = $٧\sqrt{٥}$

∴ ارتفاع متوازى السطوح = $\frac{\text{الحجم}}{\text{مساحة القاعدة}}$

$= \frac{٤٩}{٧\sqrt{٥}} = \frac{٧\sqrt{٥}}{٥}$ وحدة طول.

٤٢

∵ $\begin{vmatrix} -١٢ & ٠ & ل \\ ٠ & ٣ & -١ \\ ٢ & ١ & -١٥ \end{vmatrix} = ٥٢٨ - ٦\,ل$

∴ حجم متوازى السطوح = $|٥٢٨ - ٦\,ل| = ٥٤٦$

∴ $|٦\,ل - ٥٢٨| = ٥٤٦$

∴ إما $٦\,ل - ٥٢٨ = ٥٤٦$ ومنها $ل = ١٧٩$

أو $٦\,ل - ٥٢٨ = -٥٤٦$ ومنها $ل = -٣$

٤٣

$\overline{أب} = \overline{ب} - \vec{أ} = (١ ، ٠ ، ٢)$

$\overline{أح} = \overline{ح} - \vec{أ} = (٢ ، ١ ، ١)$

$\overline{أء} = \overline{ء} - \vec{أ} = (٢ ، ٢ ، ٣)$

∵ $\overline{أب} \cdot \overline{أح} \times \overline{أء} = \begin{vmatrix} ١ & ٠ & ٢ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٣ \end{vmatrix} = ٥$

∴ حجم متوازى السطوح = $|٥| = ٥$ وحدة حجم.

٤٤

$\vec{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{ح}$ متجهات غير صفرية

، $\vec{أ} \cdot \overline{ب} \times \overline{ح} = \begin{vmatrix} ١ & -٢ & ٣ \\ -٢ & ٣ & -٤ \\ ١ & -٣ & ٥ \end{vmatrix} =$ صفر

∴ $\vec{أ}$ ، $\overline{ب}$ ، $\overline{ح}$ تقع فى نفس المستوى.

٤٥

$\overline{أب} = (-٢ ، -٤ ، -٦)$

$\overline{أح} = (-١ ، -٣ ، -٨)$

$\overline{أء} = (١ ، ٠ ، -٧)$

، $\overline{أب} \cdot \overline{أح} \times \overline{أء} = \begin{vmatrix} -٢ & -٤ & -٦ \\ -١ & -٣ & -٨ \\ ١ & ٠ & -٧ \end{vmatrix} =$ صفر

∴ أ ، ب ، ح ، ء تقع فى مستوى واحد.

٤٦

إذا كان: $\vec{أ}$ ، $\vec{ب}$ ، $\vec{ج}$ في مستوى واحد

فإن: $\vec{أ} . \vec{ب} \times \vec{ج}$ = صفر

$$\begin{vmatrix} ١ & -١ & ١ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ١ & ل & -٣ \end{vmatrix} = ٠$$

$(-٣ - ٢ ل) - (-١)(-٩ - ٢) + ١ (٣ ل - ١) = ٠$

$-٣ - ٢ ل - ١١ + ٣ ل - ١ = ٠$

$ل - ١٥ = ٠$ ∴ $ل = ١٥$

٤٧

$\overrightarrow{أب} = (-١ ، ٥ ، -٣)$ $\overrightarrow{أج} = (-٤ ، ٣ ، ٣)$

$\overrightarrow{أد} = (١ ، ٧ ، ك + ١)$

إذا كان: أ ، ب ، ج ، د في مستوى واحد

∴ $\overrightarrow{أب} . \overrightarrow{أج} \times \overrightarrow{أد}$ = صفر

$$\begin{vmatrix} -١ & ٥ & -٣ \\ -٤ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٧ & ك + ١ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ $(-١)(٣(ك + ١) - ٢١) - ٥((-٤)(ك + ١) - ٣)$

$+ (-٣)(-٢٨ - ٣) = ٠$

∴ $-٣ ك - ٣ + ٢١ + ٢٠ ك + ٢٠ + ١٥ + ٩٣ = ٠$

∴ $١٧ ك + ١٤٦ = ٠$ ∴ $ك = \frac{-١٤٦}{١٧}$

٤٨

(١) $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\|^٢ + |\vec{أ} . \vec{ب}|^٢$

$= \|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ جا^٢θ + \|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ جتا^٢θ$

$= \|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ (جا^٢θ + جتا^٢θ)$

$= \|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢$

(٢) إذا كان: $\vec{أ} . \vec{ب}$ = صفر فإن: $\vec{أ} \perp \vec{ب}$

أو أحدهما $= \vec{و}$

إذا كان: $\vec{أ} \times \vec{ب} = \vec{و}$ فإن: $\vec{أ} // \vec{ب}$

أو أحدهما $= \vec{و}$

∵ لا يمكن أن يكون $\vec{أ} \perp \vec{ب}$ ، $\vec{أ} // \vec{ب}$

في نفس الوقت.

∴ $\vec{أ} = \vec{و}$ أو $\vec{ب} = \vec{و}$

٤٩

الطرف الأيمن

$= \vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{ج} + \vec{ب} \times \vec{ج} + \vec{ب} \times \vec{أ}$

$+ \vec{ج} \times \vec{أ} + \vec{ج} \times \vec{ب}$

$= \vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{ج} + \vec{ب} \times \vec{ج} + (-\vec{أ} \times \vec{ب})$

$+ (-\vec{أ} \times \vec{ج}) + (-\vec{ب} \times \vec{ج}) = \vec{و}$ = الطرف الأيسر.

٥٠

الطرف الأيمن

$= (\vec{أ} - \vec{ب}) \times (\vec{أ} + \vec{ب})$

$= \vec{أ} \times \vec{أ} + \vec{أ} \times \vec{ب} - \vec{ب} \times \vec{أ} - \vec{ب} \times \vec{ب}$

$= \vec{و} + \vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{ب} - \vec{و}$

$= ٢ \vec{أ} \times \vec{ب}$ = الطرف الأيسر.

٥١

$(\vec{أ} - \vec{د}) \times (\vec{ب} - \vec{ج})$

$= \vec{أ} \times \vec{ب} - \vec{أ} \times \vec{ج} - \vec{د} \times \vec{ب} + \vec{د} \times \vec{ج}$

$= \vec{ج} \times \vec{د} - \vec{ب} \times \vec{د} + \vec{د} \times \vec{ب} - \vec{ج} \times \vec{د} = \vec{و}$

∴ المتجه $(\vec{أ} - \vec{د})$ يوازي المتجه $(\vec{ب} - \vec{ج})$

٥٢

$$\frac{\|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ جا^٢ θ + \|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ جتا^٢ θ}{٢ \|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢}$$

$$= \frac{\|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ (جا^٢ θ + جتا^٢ θ)}{٢ \|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢} = \frac{١}{٢}$$

٥٣

الطرف الأيسر

$= \sqrt{(\vec{أ} . \vec{أ})(\vec{ب} . \vec{ب}) - (\vec{أ} . \vec{ب})^٢}$

$= \sqrt{\|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ - \|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ جتا^٢ θ}$

$= \sqrt{\|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ (١ - جتا^٢ θ)}$

$= \sqrt{\|\vec{أ}\|^٢ \|\vec{ب}\|^٢ جا^٢ θ}$

$= \|\vec{أ}\| \|\vec{ب}\| جا θ = \|\vec{أ} \times \vec{ب}\|$ = الطرف الأيمن.

٥٤

مساحة Δ أ ب ج $= \frac{١}{٢} \|\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{أج}\|$

$= \frac{١}{٢} \|\overrightarrow{بأ} \times \overrightarrow{بج}\|$

$= \frac{١}{٢} \|\overrightarrow{جأ} \times \overrightarrow{جب}\|$

∴ $\frac{١}{٢}$ (أ ب) (أ ج) جا أ $= \frac{١}{٢}$ (أ ب) (ب ج) جا ب

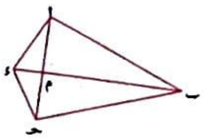
$= \frac{١}{٢}$ (أ ج) (ب ج) جا ج

وبالقسمة على $\frac{١}{٢}$ (أ ب) (أ ج) (ب ج)

∴ $\frac{جا أ}{ب ج} = \frac{جا ب}{أ ج} = \frac{جا ج}{أ ب}$

∴ $\frac{ب ج}{جا أ} = \frac{أ ج}{جا ب} = \frac{أ ب}{جا ج}$

٥٥



نفرض أن:

$\overrightarrow{أج} \cap \overrightarrow{بد} = \{م\}$

∴ $\|\overrightarrow{أج} \times \overrightarrow{بد}\|$

$= \|\overrightarrow{أج}\| . \|\overrightarrow{بد}\|$ جا (∠ د م ب)

= (أ ج) (ب د) جا (∠ د م ب)

= ٢ مساحة الشكل الرباعي أ ب ج د

∴ مساحة الشكل الرباعي $= \frac{١}{٢} \|\overrightarrow{أج} \times \overrightarrow{بد}\|$

٥٦

$\vec{أ} \times \vec{ب}$ متجه وحدة. ∴ $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = ١$

∴ $\|\vec{أ}\| \|\vec{ب}\| جا θ = ١$ ∴ $جا θ = ١$

∴ $θ = ٩٠°$ ، $\vec{أ} \perp \vec{ب}$

٥٧

$\|\vec{أ} + \vec{ب}\| = ١$ بالتربيع

$\vec{أ} . \vec{أ} + \vec{أ} . \vec{ب} + \vec{ب} . \vec{أ} + \vec{ب} . \vec{ب} = ١$

$١ + ٢ \times ١ \times ١ جتا θ + ١ = ١$ $جتا θ = -\frac{١}{٢}$

$\|\vec{أ} - \vec{ب}\|^٢ = \vec{أ} . \vec{أ} - ٢ \vec{أ} . \vec{ب} + \vec{ب} . \vec{ب}$

$= ١ - ٢ \times ١ \times ١ جتا θ + ١$

$= ٢ - ٢ \times -\frac{١}{٢} = ٣$

∴ $\|\vec{أ} - \vec{ب}\| = \sqrt{٣}$

٥٨

(١) الطرف الأيمن $= \vec{أ} \times \vec{أ} - \vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{ج}$

$+ \vec{ب} \times \vec{أ} - \vec{ب} \times \vec{ب} + \vec{ب} \times \vec{ج}$

$- \vec{ج} \times \vec{أ} + \vec{ج} \times \vec{ب} - \vec{ج} \times \vec{ج}$

$= -\vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{ج} - \vec{أ} \times \vec{ب}$

$+ \vec{ب} \times \vec{ج} + \vec{أ} \times \vec{ج} - \vec{ب} \times \vec{ج}$

$= -٢ \vec{أ} \times \vec{ب} + ٢ \vec{أ} \times \vec{ج}$

$= ٢ \vec{أ} \times (\vec{ج} - \vec{ب})$ = الطرف الأيسر.

(٢) $(\vec{أ} - \vec{ب} - \vec{ج}) \times (\vec{أ} + \vec{ب} + \vec{ج})$

$= \vec{أ} \times \vec{أ} + \vec{أ} \times \vec{ب} + \vec{أ} \times \vec{ج} - \vec{ب} \times \vec{أ}$

$- \vec{ب} \times \vec{ب} - \vec{ب} \times \vec{ج} - \vec{ج} \times \vec{أ}$

$- \vec{ج} \times \vec{ب} - \vec{ج} \times \vec{ج}$

$= ٢ \vec{أ} \times \vec{ب} + ٢ \vec{أ} \times \vec{ج} = ٢ \vec{أ} \times (\vec{ب} + \vec{ج})$

= الطرف الأيسر.

٥٩

$\vec{أ} \times \vec{ب} = (١ \times ١ \, جا θ) \vec{ى}$ ∴ $\|\vec{أ} \times \vec{ب}\| = جا θ$

$(\vec{أ} \times \vec{ب}) . \vec{ج} = \|\vec{أ} \times \vec{ب}\| \times \|\vec{ج}\| جتا θ$

$= جا θ \times ١ \times جتا θ = \frac{١}{٢} جا ٢θ$

، (١-) (٢٨ - ٣) = ٠

∴ ٢٠ ك - ٣ - ٢١ + ٢٠ ك + ٢٠ + ١٥ + ٩٣ = ٠

∴ ١٧ ك + ١٤٦ = ٠   ∴ ك = $\frac{-١٤٦}{١٧}$

٤٨

① $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\|^{2} + |\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}|^{2}$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2} \text{جا}^{2}\theta + \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2} \text{جتا}^{2}\theta$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2} (\text{جا}^{2}\theta + \text{جتا}^{2}\theta)$

$= \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2}$

② إذا كان : $\overrightarrow{\text{أ}} \cdot \overrightarrow{\text{ب}}$ = صفر   فإن : $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

$(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ء}}) \times (\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}})$

$= \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{ء}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ء}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$

$= \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ء}} + \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ء}} - \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{ء}} = \overrightarrow{\text{و}}$

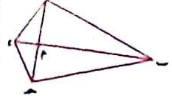
∴ المتجه $(\overrightarrow{\text{أ}} - \overrightarrow{\text{ء}})$ يوازى المتجه $(\overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}})$

٥٢

$\frac{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2} \text{جا}^{2}\theta + \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2} \text{جتا}^{2}\theta}{٢ \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2}}$

$= \frac{\|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2} (\text{جا}^{2}\theta + \text{جتا}^{2}\theta)}{٢ \|\overrightarrow{\text{أ}}\|^{2} \|\overrightarrow{\text{ب}}\|^{2}} = \frac{١}{٢}$

نفرض أن :



$\overrightarrow{\text{أحـ}} \cap \overrightarrow{\text{بء}} = \{\text{م}\}$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أحـ}} \times \overrightarrow{\text{بء}}\|$

$= \|\overrightarrow{\text{أحـ}}\| \cdot \|\overrightarrow{\text{بء}}\|$ جا (∠ أ م ب)

= (أحـ) (بء) جا (∠ أ م ب)

= ٢ مساحة الشكل الرباعى أ ب حـ ء

∴ مساحة الشكل الرباعى = $\frac{١}{٢} \|\overrightarrow{\text{أحـ}} \times \overrightarrow{\text{بء}}\|$

٥٦

$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ متجه وحدة.   ∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = ١$

②

$= \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$

$- \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} - \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$

$- \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$

$= ٢ \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + ٢ \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = ٢ \overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}})$

= الطرف الأيسر.

٥٩

$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = (١ \times ١\ \text{جا}\ \theta)\ \overrightarrow{\text{ى}}$ ∴ $\|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| = \text{جا}\ \theta$

$(\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) \cdot \overrightarrow{\text{حـ}} = \|\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}\| \times \|\overrightarrow{\text{حـ}}\|\ \text{جتا}\ \theta$

$= \text{جا}\ \theta \times ١ \times \text{جتا}\ \theta = \frac{١}{٢}\ \text{جا}\ ٢\theta$

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ $(\times \overrightarrow{\text{ب}})$

، $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$

$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = - \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$ (١)

$\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ $(\times \overrightarrow{\text{حـ}})$

، $(\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}}) \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$

$\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} + \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{و}}$

$\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = - \overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$ (٢)

من (١) ، (٢) :

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$

* التفسير الهندسى :

∵ $\overrightarrow{\text{أ}} + \overrightarrow{\text{ب}} + \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{٠}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{حـ}}$ تمثل بأضلاع مثلث مأخوذة فى ترتيب دورى واحد.

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}$ = ٢ مساحة $\Delta\ \overrightarrow{\text{ى}}$ (٣)

، $\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}}$ = ٢ مساحة $\Delta\ \overrightarrow{\text{ى}}$ (٤)

، $\overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$ = ٢ مساحة $\Delta\ \overrightarrow{\text{ى}}$ (٥)

من (٣) ، (٤) ، (٥) :

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{حـ}} = \overrightarrow{\text{حـ}} \times \overrightarrow{\text{أ}}$

٦١

∵ $\overrightarrow{\text{أ}} \times (\overrightarrow{\text{ب}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})) = \overrightarrow{\text{و}}$

فإن : ① $\overrightarrow{\text{أ}} = \overrightarrow{\text{و}}$ (مرفوض)

أو ② $\overrightarrow{\text{ب}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}) = \overrightarrow{\text{و}}$

ومنها $\overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$ (مرفوض)

أو $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \overrightarrow{\text{و}}$

ومنها $\overrightarrow{\text{أ}} // \overrightarrow{\text{ب}}$ (المطلوب أولاً)

أو $\overrightarrow{\text{ب}} // (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}})$ (مرفوض)

أو ③ $\overrightarrow{\text{أ}} // (\overrightarrow{\text{ب}} \times (\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}}))$

وبفرض أن $\overrightarrow{\text{أ}} \times \overrightarrow{\text{ب}} = \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ى}}$ حيث $\overrightarrow{\text{ى}}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى به $\overrightarrow{\text{أ}}$ ، $\overrightarrow{\text{ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} // (\overrightarrow{\text{ب}} \times \text{ك}\ \overrightarrow{\text{ى}})$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} // \text{ك}\ (\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ى}})$

وبفرض أن $\overrightarrow{\text{ب}} \times \overrightarrow{\text{ى}} = \text{م}\ \overrightarrow{\text{ن}}$ حيث $\overrightarrow{\text{ن}}$ متجه وحدة عمودى على المستوى الذى به $\overrightarrow{\text{ب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ى}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} // \text{ك م}\ \overrightarrow{\text{ن}}$ حيث (ك م ثابت)

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} // \overrightarrow{\text{ن}}$

، ∵ $\overrightarrow{\text{ن}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ}} \perp \overrightarrow{\text{ب}}$ (المطلوب ثانيًا)

حلول تمـاريـن 5

أولا تمارين على معادلة الخط المستقيم فى الفراغ

١

① متجه الاتجاه = (−١ ، ٢ ، −٢) − (٠ ، ٠ ، ٠)
= (−١ ، ٢ ، −٢)

② متجه الاتجاه = $\overrightarrow{جـ د}$ = (١ ، ١ ، −١)
− (٠ ، −٢ ، ٣) = (١ ، ٣ ، −٤)

٢

① أ(−١ ، ٢ ، ٣)

∴ جيوب تمام $\vec{أ} = \frac{\vec{أ}}{\|\vec{أ}\|} = \frac{(−١ ، ٢ ، ٣)}{\sqrt{(−١)^٢ + (٢)^٢ + (٣)^٢}}$

∴ جيوب تمام المستقيم = ± $\left(\frac{−١}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٢}{\sqrt{١٤}} ، \frac{٣}{\sqrt{١٤}}\right)$

② ب(١ ، ١ ، ١)

∴ جيوب تمام $\vec{ب} = \frac{\vec{ب}}{\|\vec{ب}\|} = \frac{(١ ، ١ ، ١)}{\sqrt{١^٢ + ١^٢ + ١^٢}}$

∴ جيوب تمام المستقيم = ± $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

٣

متجه اتجاه المستقيم
= (٦ ، −٧ ، −١) − (٢ ، −٣ ، ١) = (٤ ، −٤ ، −٢)

∴ نسب الاتجاه للمستقيم هى ٤ ، −٤ ، −٢

، متجه وحدة فى اتجاه المستقيم المطلوب

= ± $\frac{(٤ ، −٤ ، −٢)}{\sqrt{(٤)^٢ + (−٤)^٢ + (−٢)^٢}}$ = ± $\left(\frac{٢}{٣} ، \frac{−٢}{٣} ، \frac{−١}{٣}\right)$

∴ جيوب تمام الاتجاه هى $\frac{٢}{٣}$ ، $−\frac{٢}{٣}$ ، $−\frac{١}{٣}$

أ، $−\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$

٤

المعادلة المتجهة : $\vec{ر}$ = (٤ ، −٢ ، ٥) + ك (١ ، −٢ ، ٢)

∴ س − ٤ = $\frac{ص + ٢}{−٢} = \frac{ع − ٥}{٢}$

، بوضع ص = ٢ ∴ س = ٢ ، ع = ١

∴ (٢ ، ٢ ، ١) إحداثيات نقطة على المستقيم.

٥

متجه الاتجاه = $\overrightarrow{أب}$ = (٣ ، −٢ ، ٦) − (−١ ، ٤ ، ٢)
= (٤ ، −٦ ، ٤)

، المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (−١ ، ٤ ، ٢) + ك (٤ ، −٦ ، ٤)

المعادلات البارامترية :

س = −١ + ٤ ك ، ص = ٤ − ٦ ك ، ع = ٢ + ٤ ك

المعادلة الإحداثية :

$\frac{س + ١}{٤} = \frac{ص − ٤}{−٦} = \frac{ع − ٢}{٤}$

٦

بوضع $\frac{س + ٤}{٣} = \frac{٢ ص + ٥}{٢} = \frac{٤ − ع}{٤}$ = ك

∴ س = ٣ ك − ٤ ، ص = ك − $\frac{٥}{٢}$

، ع = −٤ ك + ٤

، المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = $\left(−٤ ، −\frac{٥}{٢} ، ٤\right)$ + ك (٣ ، ١ ، −٤)

وبوضع س = ٢

∴ ص = $−\frac{١}{٢}$ ، ع = −٤

∴ $\left(٢ ، −\frac{١}{٢} ، −٤\right)$ إحداثيات نقطة تقع على المستقيم.

٧

متجه الاتجاه = $\overrightarrow{أب}$ = (٥ ، ٨ ، ٠) − (٣ ، ٢ ، ٤)
= (٢ ، ٦ ، −٤)

المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (٣ ، ٢ ، ٤) + ك (٢ ، ٦ ، −٤)

، المعادلة البارامترية :

س = ٣ + ٢ ك ، ص = ٢ + ٦ ك ، ع = ٤ − ٤ ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س − ٣}{٢} = \frac{ص − ٢}{٦} = \frac{ع − ٤}{−٤}$

بوضع س = ٤

∴ ص = ٥ ∴ ع = ٢

∴ النقطة جـ ∋ المستقيم

أى أن : أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة.

٨

① (أ)	② (جـ)	③ (أ)	④ (جـ)
⑤ (جـ)	⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (أ)	⑩ (أ)	⑪ (أ)	⑫ (جـ)
⑬ (أ)	⑭ (د)	⑮ (ب)	⑯ (جـ)
⑰ (د)	⑱ (ب)	⑲ (جـ)	⑳ (جـ)
㉑ (ب)	㉒ (جـ)	㉓ (د)	㉔ (د)
㉕ (د)			

٩

① متجه اتجاه المستقيم

= (−١ ، ٢ ، ٤) − (٣ ، ٢ ، ١) = (−٤ ، ٠ ، ٣)

المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (−١ ، ٢ ، ٤) + ك (−٤ ، ٠ ، ٣)

، المعادلة البارامترية :

س = −١ − ٤ ك ، ص = ٢ ، ع = ٤ + ٣ ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س + ١}{−٤} = \frac{ع − ٤}{٣}$ ، ص = ٢

② متجه اتجاه المستقيم

= (−٣ ، ١ ، ٤) − (٢ ، −١ ، ٥) = (−٥ ، ٢ ، −١)

، المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (−٣ ، ١ ، ٤) + ك (−٥ ، ٢ ، −١)

، المعادلة البارامترية :

س = −٣ − ٥ ك ، ص = ١ + ٢ ك ، ع = ٤ − ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س + ٣}{−٥} = \frac{ص − ١}{٢} = \frac{ع − ٤}{−١}$

③ المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = ك (−٢ ، ٣ ، ١)

، المعادلة البارامترية :

س = −٢ ك ، ص = ٣ ك ، ع = ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س}{−٢} = \frac{ص}{٣} = \frac{ع}{١}$

④ المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (٤ ، −٢ ، ٥) + ك (٢ ، ١ ، −١)

، المعادلة البارامترية : س = ٤ + ٢ ك

، ص = − ٢ + ك ، ع = ٥ − ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{س − ٤}{٢} = \frac{ص + ٢}{١} = \frac{ع − ٥}{−١}$

⑤ المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (٢ ، ٠ ، −٣) + ك (٢ ، −٣ ، ٠)

، المعادلة البارامترية :

س = ٢ + ٢ ك ، ص = −٣ ك ، ع = −٣

، المعادلة الإحداثية : $\frac{س − ٢}{٢} = \frac{ص}{−٣}$ ، ع = −٣

⑥ ∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية مع الاتجاهات الموجبة لمحاور الإحداثيات

∴ $جتا^٢ \theta_{س} + جتا^٢ \theta_{ص} + جتا^٢ \theta_{ع} = ١$

∴ $جتا \theta_{س} = جتا \theta_{ص} = جتا \theta_{ع} = ± \frac{١}{\sqrt{٣}}$

∴ متجه اتجاه المستقيم = $\left(\frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}} ، \frac{١}{\sqrt{٣}}\right)$

أى أن متجه اتجاه المستقيم = (١ ، ١ ، ١)

∴ المعادلة المتجهة :

$\vec{ر}$ = (٣ ، ٢ ، ٥) + ك (١ ، ١ ، ١)

، المعادلة البارامترية :

س = ٣ + ك ، ص = ٢ + ك ، ع = ٥ + ك

، المعادلة الإحداثية :

س − ٣ = ص − ٢ = ع − ٥

⑦ متجه الاتجاه = $\overrightarrow{\text{ب ح}}$ = (٢ ، ١ ، ٠) − (−٣ ، ٢ ، ١)
= (٥ ، −١ ، −١)

المعادلة المتجهة :

$\vec{\text{ر}}$ = (١ ، −١ ، ٠) + ك (٥ ، −١ ، −١)

، المعادلة البارامترية :

س = ١ + ٥ ك ، ص = −١ − ك ، ع = − ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{\text{س} - ١}{٥} = \frac{\text{ص} + ١}{-١} = \frac{\text{ع}}{-١}$

، ∵ $\frac{-١٤ - ١}{٥} = -٣$ ، $\frac{٢ + ١}{-١} = -٣$ ، $\frac{٣}{-١} = -٣$

∴ النقطة (−١٤ ، ٢ ، ٣) تقع على المستقيم

⑧ متجه الاتجاه = (٤ ، ٥ ، ٣)

المعادلة المتجهة :

$\vec{\text{ر}}$ = (−١ ، ٤ ، ٢) + ك (٤ ، ٥ ، ٣)

، المعادلة البارامترية :

س = −١ + ٤ ك ، ص = ٤ + ٥ ك ، ع = ٢ + ٣ ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{\text{س} + ١}{٤} = \frac{\text{ص} - ٤}{٥} = \frac{\text{ع} - ٢}{٣}$

⑨ متجه الاتجاه = (٤ ، −٣ ، ٢١)

∴ المعادلة المتجهة :

$\vec{\text{ر}}$ = (١ ، ٥ ، −٢) + ك (٤ ، −٣ ، ٢١)

، المعادلة البارامترية : س = ١ + ٤ ك

، ص = ٥ − ٣ ك ، ع = −٢ + ٢١ ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{\text{س} - ١}{٤} = \frac{\text{ص} - ٥}{-٣} = \frac{\text{ع} + ٢}{٢١}$

⑩ منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ = م $\left(\frac{٣ - ٥}{٢} ، \frac{٦ + ٢}{٢} ، \frac{-٧ + ٣}{٢}\right)$

= م (−١ ، ٤ ، −٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم هو $\overrightarrow{\text{ح م}}$

= (−١ ، ٤ ، −٢) − (٤ ، −٧ ، −٢)

= (−٥ ، ١١ ، ٠)

∴ المعادلة المتجهة :

$\vec{\text{ر}}$ = (٤ ، −٧ ، −٢) + ك (−٥ ، ١١ ، ٠)

، المعادلة البارامترية :

س = ٤ − ٥ ك ، ص = −٧ + ١١ ك ، ع = −٢

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{\text{س} - ٤}{-٥} = \frac{\text{ص} + ٧}{١١}$ ، ع = −٢

⑪ معادلة الكرة :

س^{٢} + ص^{٢} + ع^{٢} − س + ٢ ص − ٣ ع = $\frac{١}{٢}$

مركز الكرة هو : $\left(\frac{١}{٢} ، -١ ، \frac{٣}{٢}\right)$

متجه الاتجاه = (١ ، −١ ، ١) − $\left(\frac{١}{٢} ، -١ ، \frac{٣}{٢}\right)$

= $\left(\frac{١}{٢} ، ٠ ، \frac{-١}{٢}\right)$

∴ (١ ، ٠ ، −١) أيضًا متجه اتجاه

∴ المعادلة المتجهة :

$\vec{\text{ر}}$ = (١ ، −١ ، ١) + ك (١ ، ٠ ، −١)

المعادلة البارامترية :

س = ١ + ك ، ص = −١ ، ع = ١ − ك

، المعادلة الإحداثية :

س − ١ = − ع + ١ ، ص = −١

⑫ المعادلة البارامترية :

س = ١ + ٥ ك ، ص = ٣ + ٤ ك ، ع = ٩ + ٢ ك

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{\text{س} - ١}{٥} = \frac{\text{ص} - ٣}{٤} = \frac{\text{ع} - ٩}{٢}$

⑬ بوضع $\frac{\text{س} - ٢}{١} = \frac{\text{ص} + ٤}{٥} = \frac{-٧ + \text{ع}}{-٢}$ = ك

∴ س = ٢ + ك ، ص = ٥ ك − ٤

، ع = −٢ ك + ٧

وهى المعادلات البارامترية للمستقيم

، المعادلة المتجهة :

$\vec{\text{ر}}$ = (٢ ، −٤ ، ٧) + ك (١ ، ٥ ، −٢)

⑭ بوضع : $\frac{\text{س} + ٣}{٢} = \frac{٢ \text{ص} - ١}{٥} = \frac{٣ \text{ع} + ٢}{٤}$ = ك

∴ س = ٢ ك − ٣ ، ص = $\frac{٥}{٢}$ ك + $\frac{١}{٢}$

، ع = $\frac{٤}{٣}$ ك − $\frac{٢}{٣}$

وهى المعادلات البارامترية للمستقيم

، المعادلة المتجهة :

$\vec{\text{ر}}$ = $\left(-٣ ، \frac{١}{٢} ، \frac{-٢}{٣}\right)$ + ك $\left(٢ ، \frac{٥}{٢} ، \frac{٤}{٣}\right)$

⑮ إحداثيات أى نقطة تقع على منصف الربع الثانى من المستوى ص ع :

هى : (٠ ، −أ ، أ)

نأخذ أى نقطة على المنصف وليكن : (٠ ، −١ ، ١)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (٠ ، −١ ، ١)

∴ المعادلة المتجهة :

$\vec{\text{ر}}$ = (١ ، −٢ ، ٥) + ك (٠ ، −١ ، ١)

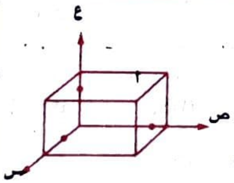
، المعادلة البارامترية :

س = ١ ، ص = −٢ − ك ، ع = ٥ + ك

، المعادلة الإحداثية :

س = ١ ، $\frac{\text{ص} + ٢}{-١} = \frac{\text{ع} - ٥}{١}$

١٠



من هندسة الشكل :

أ = (٥ ، ٥ ، ٥)

∴ متجه اتجاه المستقيم

الذى يحمل القطر = $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٥ ، ٥ ، ٥)

، المعادلة المتجهة : $\vec{\text{ر}}$ = ك (٥ ، ٥ ، ٥)

، المعادلة البارامترية :

س = ٥ ك ، ص = ٥ ك ، ع = ٥ ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٥} = \frac{\text{ع}}{٥}$

أى أن : س = ص = ع

١١

نوجد معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$:

متجه اتجاه المستقيم

$\overrightarrow{\text{ب ح}}$ = (٧ ، −٢ ، ٥) − (١ ، ٢ ، ٣)

= (٦ ، −٤ ، ٢)

∴ معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{\text{ب ح}}$ هى :

$\vec{\text{ر}}$ = (١ ، ٢ ، ٣) + ك (٦ ، −٤ ، ٢)

∴ نقطة المسقط ولتكن

ء = (١ + ٦ ك ، ٢ − ٤ ك ، ٣ + ٢ ك)

$\overrightarrow{\text{أ ء}}$ = (١ + ٦ ك ، ٢ − ٤ ك ، ٣ + ٢ ك)
− (٠ ، ٩ ، ٦)

= (١ + ٦ ك ، −٧ − ٤ ك ، −٣ + ٢ ك)

∵ $\overrightarrow{\text{أ ء}} \perp \overleftrightarrow{\text{ب ح}}$

∴ $\overrightarrow{\text{أ ء}} \cdot \overrightarrow{\text{ب ح}}$ = صفر

∴ (١ + ٦ ك ، −٧ − ٤ ك ، −٣ + ٢ ك) . (٦ ، −٤ ، ٢)
= صفر

∴ ٦ + ٣٦ ك + ٢٨ + ١٦ ك + (−٦) + ٤ ك = ٠

∴ ٥٦ ك = −٢٨

∴ ك = −$\frac{١}{٢}$

∴ النقطة ء هى (−٢ ، ٤ ، ٢)

١٢

∵ $\vec{\text{د}}$ = (أ ، ب ، صفر)

∴ المستقيم يقع فى مستوى يوازى المستوى س ص

١٣

الصواب هو :

① مجموع مربعات جيوب تمام الاتجاه لأى مستقيم = ١

② جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين هى :

$\frac{(\text{س}_٢ - \text{س}_١ ، \text{ص}_٢ - \text{ص}_١ ، \text{ع}_٢ - \text{ع}_١)}{\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢ + (\text{ع}_٢ - \text{ع}_١)^٢}}$

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{\text{س} - ١}{١} = \frac{\text{ص} - ٥}{-٢} = \frac{\text{ع} + ٢}{٢١}$

⑩ منتصف $\overline{\text{أب}}$ = م $\left(\frac{٢ - ٥}{٢} ، \frac{٦ + ٢}{٢} ، \frac{-٧ + ٣}{٢}\right)$

= م (−١ ، ٤ ، −٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم هو $\overrightarrow{\text{حـ م}}$

= (−١ ، ٤ ، −٢) − (٤ ، −٧ ، −٢)

= (−٥ ، ١١ ، ٠)

، المعادلة الإحداثية :

$\frac{\text{س} - ١}{٥} = \frac{\text{ص} - ٣}{٤} = \frac{\text{ع} - ١}{٢}$

⑬ بوضع $\frac{\text{س} - ٢}{١} = \frac{\text{ص} + ٤}{٥} = \frac{-٧ + \text{ع}}{-٢} = \text{ك}$

∴ س = ٢ + ك ، ص = ٥ ك − ٤

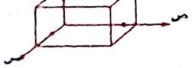
، ع = −٢ ك + ٧

وهى المعادلات البارامترية للمستقيم

، المعادلة المتجهة :

$\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، −٤ ، ٧) + ك (١ ، ٥ ، −٢)

أ = (٥ ، ٥ ، ٥)



∴ متجه اتجاه المستقيم

الذى يحمل القطر = $\overrightarrow{\text{و أ}}$ = (٥ ، ٥ ، ٥)

، المعادلة المتجهة : $\overrightarrow{\text{ر}}$ = ك (٥ ، ٥ ، ٥)

، المعادلة البارامترية :

س = ٥ ك ، ص = ٥ ك ، ع = ٥ ك

، المعادلة الإحداثية : $\frac{\text{س}}{٥} = \frac{\text{ص}}{٥} = \frac{\text{ع}}{٥}$

أى أن : س = ص = ع

∵ $\overrightarrow{\text{ه}}$ = (أ ، ب ، صفر)

∴ المستقيم يقع فى مستوى يوازى المستوى س ص

١٣

الصواب هو :

① مجموع مربعات جيوب تمام الاتجاه لأى مستقيم = ١

② جيوب تمام الاتجاه للمستقيم المار بالنقطتين هى :

$\frac{(\text{س}_٢ - \text{س}_١ ، \text{ص}_٢ - \text{ص}_١ ، \text{ع}_٢ - \text{ع}_١)}{\sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢ + (\text{ع}_٢ - \text{ع}_١)^٢}}$

١

① (د)	② (جـ)	③ (جـ)	④ (جـ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (ب)	⑩ (أ)	⑪ (د)	

٢

جتا $\theta = \left| \frac{٥}{١٣\sqrt{٢}} \times \frac{-٣}{٥\sqrt{٢}} + \frac{-١٢}{١٣\sqrt{٢}} \times \frac{٤}{٥\sqrt{٢}} + \frac{١}{\sqrt{٢}} \times \frac{١}{\sqrt{٢}} \right|$

$= \left| \frac{-١٥}{١٣٠} + \frac{-٤٨}{١٣٠} + \frac{١}{٢} \right| = \frac{١}{٦٥}$

∴ ق(∠θ) ≃ ٨٩° ٧َ

٣

$\overrightarrow{\text{ه}_١}$ = $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، ١)$ ، $\overrightarrow{\text{ه}_٢}$ = (−١ ، ١ ، ٢)

جتا $\theta = \frac{|(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، ١) \cdot (-١ ، ١ ، ٢)|}{\sqrt{(\frac{١}{٢})^٢ + (\frac{١}{٣})^٢ + ١} \sqrt{(-١)^٢ + (١)^٢ + (٢)^٢}}$

$= \frac{|-\frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + ٢|}{\frac{٧}{٦} \times \sqrt{٦}}$

∴ ق(∠θ) ≃ ٥٠° ٦َ

٤

$\overrightarrow{\text{ه}_١}$ = (−٢ ، ٠ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ه}_٢}$ = (٠ ، ٣ ، −٣)

جتا $\theta = \frac{|(-٢ ، ٠ ، ٢) \cdot (٠ ، ٣ ، -٣)|}{\sqrt{(-٢)^٢ + (٢)^٢} \sqrt{(٣)^٢ + (-٣)^٢}}$

$= \frac{|-٦|}{٢\sqrt{٢} \times ٣\sqrt{٢}} = \frac{١}{٢}$

∴ ق(∠θ) = ٦٠°

٥

$\overrightarrow{\text{ه}_١}$ = (−٥ ، −١ ، ٤) ، $\overrightarrow{\text{ه}_٢}$ = (٣ ، −٤ ، ٢)

جتا $\theta = \frac{|(-٥ ، -١ ، ٤) \cdot (٣ ، -٤ ، ٢)|}{\sqrt{(-٥)^٢ + (-١)^٢ + (٤)^٢} \sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢ + (٢)^٢}}$

$= \frac{|-١٥ + ٤ + ٨|}{\sqrt{٤٢} \sqrt{٢٩}}$

∴ ق(∠θ) ≃ ٨٥° ٤َ

٦

① $\overrightarrow{\text{ه}_١}$ = (−٣ ، ٢ ، ٤) − (٢ ، ٥ ، −٢)

= (−٥ ، −٣ ، ٦)

$\overrightarrow{\text{ه}_٢}$ = (١ ، −٢ ، ٢) − (٤ ، ٢ ، ٣)

= (−٣ ، −٤ ، −١)

جتا $\theta = \frac{|(-٥ ، -٣ ، ٦) \cdot (-٣ ، -٤ ، -١)|}{\sqrt{(-٥)^٢ + (-٣)^٢ + (٦)^٢} \sqrt{(-٣)^٢ + (-٤)^٢ + (-١)^٢}}$

$= \frac{|١٥ + ١٢ - ٦|}{\sqrt{٧٠} \sqrt{٢٦}}$

∴ ق(∠θ) ≃ ٦٠° ٣١َ

② $\overrightarrow{\text{ه}_١}$ = (−١ ، ٤ ، ٢) ، $\overrightarrow{\text{ه}_٢}$ = (١ ، ١ ، ٣)

جتا $\theta = \frac{|(-١ ، ٤ ، ٢) \cdot (١ ، ١ ، ٣)|}{\sqrt{(-١)^٢ + (٤)^٢ + (٢)^٢} \sqrt{(١)^٢ + (١)^٢ + (٣)^٢}}$

$= \frac{|-١ + ٤ + ٦|}{\sqrt{٢١} \sqrt{١١}}$

∴ ق(∠θ) ≃ ٥٣° ٤١َ

③ $\overrightarrow{\text{ه}_١}$ = $(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤})$ ، $\overrightarrow{\text{ه}_٢}$ = (٣ ، −٢ ، −٥)

جتا $\theta = \frac{|(\frac{١}{٢} ، \frac{١}{٣} ، \frac{١}{٤}) \cdot (٣ ، -٢ ، -٥)|}{\sqrt{(\frac{١}{٢})^٢ + (\frac{١}{٣})^٢ + (\frac{١}{٤})^٢} \sqrt{(٣)^٢ + (-٢)^٢ + (-٥)^٢}}$

$= \frac{|\frac{٣}{٢} - \frac{٢}{٣} - \frac{٥}{٤}|}{\frac{\sqrt{٦١}}{١٢} \times \sqrt{٣٨}}$

∴ ق(∠θ) ≃ ٨٤° ٢َ

٧

$\overrightarrow{\text{ه}_١}$ = (٤ ، −١ ، ٥) ، $\overrightarrow{\text{ه}_٢}$ = (١ ، ٢ ، −١)

جتا $\theta = \frac{|(٤ ، -١ ، ٥) \cdot (١ ، ٢ ، -١)|}{\sqrt{(٤)^٢ + (-١)^٢ + (٥)^٢} \sqrt{(١)^٢ + (٢)^٢ + (-١)^٢}}$

$= \frac{|٤ - ٢ - ٥|}{\sqrt{٤٢} \sqrt{٦}}$

∴ ق(∠θ) ≃ ٧٩° ٦َ

٨

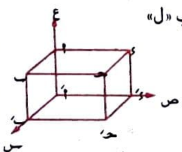
$\overrightarrow{\text{ه}_١}$ = (٠ ، ٠ ، ١) ، $\overrightarrow{\text{ه}_٢}$ = (١ ، ٠ ، ٠)

جتا $\theta = \frac{|(٠ ، ٠ ، ١) \cdot (١ ، ٠ ، ٠)|}{\sqrt{(١)^٢} \sqrt{(١)^٢}}$ = صفر

∴ ق(∠θ) = ٩٠°

٩

بفرض أن طول ضلع المكعب «ل»



، من هندسة الشكل :

أ = (٠ ، ٠ ، ل)

حَ = (ل ، ل ، ٠)

ء = (٠ ، ل ، ل) ، بَ = (ل ، ٠ ، ٠)

متجه اتجاه $\overleftrightarrow{\text{أحَ}}$ = (ل ، ل ، ٠) − (٠ ، ٠ ، ل)

= (ل ، ل ، −ل)

متجه اتجاه $\overleftrightarrow{\text{بَء}}$ = (٠ ، ل ، ل) − (ل ، ٠ ، ٠)

= (−ل ، ل ، ل)

∴ جتا $\theta = \frac{|(\text{ل} ، \text{ل} ، -\text{ل}) \cdot (-\text{ل} ، \text{ل} ، \text{ل})|}{\sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ل}^٢ + \text{ل}^٢} \sqrt{\text{ل}^٢ + \text{ل}^٢ + \text{ل}^٢}}$

$= \frac{|-\text{ل}^٢ + \text{ل}^٢ - \text{ل}^٢|}{\sqrt{٣}\,\text{ل} \times \sqrt{٣}\,\text{ل}} = \frac{\text{ل}^٢}{٣\text{ل}^٢} = \frac{١}{٣}$

∴ الزاوية بين قطرى المكعب = جتا$^{-١}$ $\frac{١}{٣}$

١٠

جتا $\theta = \frac{|\text{أ}_١\text{أ}_٢ + \text{ب}_١\text{ب}_٢ + \text{حـ}_١\text{حـ}_٢|}{\sqrt{\text{أ}_١^٢ + \text{ب}_١^٢ + \text{حـ}_١^٢} \sqrt{\text{أ}_٢^٢ + \text{ب}_٢^٢ + \text{حـ}_٢^٢}}$

١

① (أ)	② (د)	③ (أ)	④ (د)
⑤ (جـ)	⑥ (ب)	⑦ (جـ)	⑧ (أ)
⑨ (ب)	⑩ (ب)	⑪ (د)	⑫ (ب)

٢

عند نقطة تقاطع المستقيمين :

ك$_١$ + ٤ = ٢ ك$_٢$ + ١

∴ ك$_١$ − ٢ ك$_٢$ = −٣ (١)

−٤ ك$_١$ − ٣ = −٣ ك$_٢$ − ١

∴ ٤ ك$_١$ − ٣ ك$_٢$ = −٢ (٢)

٧ ك$_١$ − ١ = ٨ ك$_٢$ − ١٠

∴ ٧ ك$_١$ − ٨ ك$_٢$ = −٩ (٣)

من معادلة (١) ، (٢) :

∴ ك$_١$ = ١ ، ك$_٢$ = ٢

وبالتعويض فى معادلة (٣) :

٧ × ١ − ٨ × ٢ = −٩

أى أنها تحقق معادلة (٣)

س = ٥ ، ص = −٧ ، ع = ٦

∴ المستقيمين متقاطعين فى النقطة (٥ ، −٧ ، ٦)

٣

بوضع $\frac{\text{س} - ٦}{٢} = \frac{\text{ص} - ١}{٢} = \frac{\text{ع} - ٥}{٣} = \text{ك}_١$

∴ س = ٢ ك$_١$ + ٦ ، ص = ٢ ك$_١$ + ١

، ع = ٣ ك$_١$ + ٥

، بوضع $\frac{\text{س} - ٢}{١} = \frac{\text{ص} - ٣}{-٢} = \frac{\text{ع} + ٤}{٣} = \text{ك}_٢$

∴ س = ٢ + ك$_٢$ ، ص = −٢ ك$_٢$ + ٣

، ع = ٣ ك$_٢$ − ٤

وعند نقطة تقاطع المستقيمين :

٢ ك١ + ٦ = ٢ + ك٢

∴ ٢ ك١ − ك٢ = −٤ (١)

٢ ك١ + ١ = −٢ ك٢ + ٣

∴ ٢ ك١ + ٢ ك٢ = ٢ (٢)

٣ ك١ + ٥ = ٣ ك٢ − ٤

∴ ٣ ك١ − ٣ ك٢ = −٩ (٣)

من (١) ، (٢) : ك١ = −١ ، ك٢ = ٢

وبالتعويض فى معادلة (٣)

٣ × −١ − ٣ × ٢ = −٩

أى أنها تحقق معادلة (٣)

، س = ٤ ، ص = −١ ، ع = ٢

∴ المستقيمان متقاطعان فى النقطة (٤ ، −١ ، ٢)

٤

عند تقاطع المستقيمين : ر١ = ر٢

∴ (٠ ، ١ ، ٠) + ك١ (١ ، ٢ ، −١)

= (١ ، ١ ، ١) + ك٢ (−٢ ، −٢ ، ٠)

∴ ك١ = ١ − ٢ ك٢ ∴ ك١ + ٢ ك٢ = ١ (١)

، ١ + ٢ ك١ = ١ − ٢ ك٢

∴ ٢ ك١ + ٢ ك٢ = ٠ (٢)

، − ك١ = ١ ∴ ك١ = −١ (٣)

ومن (١) ، (٢) ينتج أن :

ك١ = −١ ، ك٢ = ١

وهذه القيم تحقق معادلة (٣)

(س ، ص ، ع) = (٠ ، ١ ، ٠) + −١ (١ ، ٢ ، −١)

ومنها س = −١ ، ص = −١ ، ع = ١

∴ المستقيمان متقاطعان فى النقطة (−١ ، −١ ، ١)

٥

بوضع س = (ص − ٤)/(−١) = (ع + ١)/٢ = ك٢

∴ س = ك٢ ، ص = − ك٢ + ٤ ، ع = ٢ ك٢ − ١ (١)

، عند تقاطع المستقيمين :

٣ + ٤ ك١ = ك٢ ∴ ٤ ك١ − ك٢ = −٣ (١) (٢)

، −١ + ك١ = − ك٢ + ٤

∴ ك١ + ك٢ = ٥ (٢) (٣)

، ن + ٣ ك١ = ٢ ك٢ − ١

٣ ك١ − ٢ ك٢ = −١ − ن (٣)

ومن (١) ، (٢) :

ك١ = ٢/٥ ، ك٢ = ٢٣/٥

، ∵ المستقيمين متقاطعان

∴ قيم ك١ ، ك٢ تحقق المعادلة (٣)

∴ ٣ × ٢/٥ − ٢ × ٢٣/٥ = −١ − ن

∴ ن = ٧

، نقطة التقاطع هى : (٢٣/٥ ، −٣/٥ ، ٤١/٥)

٦

بوضع (س + ٢)/٢ = ص/(−٣) = (ع − ١)/٤ = ك١

∴ س = ٢ ك١ − ٢ ، ص = −٣ ك١ ، ع = ٤ ك١ + ١

، بوضع (س − ٣)/أ = (ص − ١)/٤ = (ع − ٧)/٢ = ك٢

∴ س = أ ك٢ + ٣ ، ص = ٤ ك٢ + ١

، ع = ٢ ك٢ + ٧

، عند تقاطع المستقيمين :

٢ ك١ − ٢ = أ ك٢ + ٣ ∴ ٢ ك١ − أ ك٢ = ٥ (١)

، −٣ ك١ = ٤ ك٢ + ١

−٣ ك١ − ٤ ك٢ = ١ (٢)

، ٤ ك١ + ١ = ٢ ك٢ + ٧

٤ ك١ − ٢ ك٢ = ٦ (٣)

ومن (٢) ، (٣) :

∴ ك١ = ١ ، ك٢ = −١

، ∵ المستقيمين متقاطعان

∴ قيم ك١ ، ك٢ تحقق المعادلة (١)

∴ ٢ + أ = ٥ ∴ أ = ٣

٧

∵ ل١ : (س − ١)/٣ = (ص − ٢)/٤ = (ع − ٣)/(−١٢)

∴ ه١ = (٣ ، ٤ ، −١٢)

، ل٢ : (س − ٤)/٣ = (ص − ٦)/٤ = (ع + ٩)/(−١٢)

، ه٢ = (٣ ، ٤ ، −١٢)

∴ ل١ ، ل٢ لهما نفس متجه الاتجاه (١)

بوضع س = ٤ فى معادلة ل١

∴ ص = ٦ ، ع = −٩

∴ النقطة (٤ ، ٦ ، −٩) ∈ ل١

ونجد أن هذه النقطة تحقق معادلة ل٢

∴ (٤ ، ٦ ، −٩) ∈ لكل من ل١ ، ل٢ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ل١ ، ل٢ يمثلان نفس الخط المستقيم.

٨

عند نقطة التقاطع : ر١ = ر٢

(٢ ، ٣ ، ٤) + ك١ (−٤ ، −٤ ، ٥) = (−٦ ، −١٠ ، −١)

+ ك٢ (٠ ، ١ ، ٣)

∴ ٢ − ٤ ك١ = −٦ ∴ ك١ = ٢ (١)

٣ − ٤ ك١ = −١٠ + ك٢

٤ ك١ + ك٢ = ١٣ (٢)

٤ + ٥ ك١ = −١ + ٣ ك٢

٥ ك١ − ٣ ك٢ = −٥ (٣)

من (١) ، (٢) : ك١ = ٢ ، ك٢ = ٥

∴ (س ، ص ، ع) = (٢ ، ٣ ، ٤) + ٢ (−٤ ، −٤ ، ٥)

∴ نقطة التقاطع = (−٦ ، −٥ ، ١٤)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (−٦ ، −٥ ، ١٤)

، المعادلة المتجهة : ر = ك (−٦ ، −٥ ، ١٤)

، المعادلة البارامترية :

س = −٦ ك ، ص = −٥ ك ، ع = ١٤ ك

، المعادلة الإحداثية : س/(−٦) = ص/(−٥) = ع/١٤

٩

عند نقطة التقاطع : ر١ = ر٢

(١ ، ٢ ، ٣) + ك١ (٢ ، ٣ ، ٣) = (٣ ، ٥ ، ٦)

+ ك٢ (٤ ، ٥ ، ٣)

١ + ٢ ك١ = ٣ + ٤ ك٢

∴ ٢ ك١ − ٤ ك٢ = ٢ (١)

٢ + ٣ ك١ = ٥ + ٥ ك٢

٣ ك١ − ٥ ك٢ = ٣ (٢)

٣ + ٣ ك١ = ٦ + ٣ ك٢

٣ ك١ − ٣ ك٢ = ٣ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ك١ = ١ ، ك٢ = ٠

(س ، ص ، ع) = (١ ، ٢ ، ٣) + ١ (٢ ، ٣ ، ٣)

∴ نقطة التقاطع هى : (٣ ، ٥ ، ٦)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب

= (٣ ، ٥ ، ٦) − (٢ ، −١ ، ٣) = (١ ، ٦ ، ٣)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم المطلوب هى :

ر = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (١ ، ٦ ، ٣)

المعادلة البارامترية للمستقيم المطلوب هى :

س = ٢ + ك ، ص = −١ + ٦ ك ، ع = ٣ + ٣ ك

المعادلة الإحداثية للمستقيم المطلوب هى :

س − ٢ = (ص + ١)/٦ = (ع − ٣)/٣

١٠

① لكى يكون المستقيمان متوازيين فإن :

أ١/أ٢ = ب١/ب٢ = ج١/ج٢

② لكى يكون المستقيمان متعامدين فإن :

∴ (−٢ ، ٢ ، −٤) . (−٢ − ٢ ك ، −٣ + ٢ ك

، ٣ − ٤ ك) = ٠

∴ ٤ + ٤ ك − ٦ + ٤ ك − ١٢ + ١٦ ك = ٠

∴ ك = ٧/١٢

∴ ج ن = (−١٩/٦ ، −١١/٦ ، ٢/٣) = (−١٩ ، −١١ ، ٤)

∴ متجه اتجاه ل٢ (المستقيم المطلوب)

ه٢ = و ج

= ج − و = (٣ + ٢ ك ، ١ + ك ، ٤ + ٢ ك)

، ∵ ه١ = (٢ ، ١ ، ٣)

∵ المستقيمين متعامدان ∴ ه١ . ه٢ = ٠

عند نقطة التقاطع يكون : ر١ = ر٢

(٢ ، −٣ ، ٥) + ك١ (٠ ، −٥ ، ٥) = (−٢ ، ٣ ، ١)

+ ك٢ (٥ ، −١ ، −١)

٢ = −٢ + ٥ ك٢ ∴ ك٢ = ١ (١)

−٣ − ٥ ك١ = ٣ − ك٢ ∴ ٥ ك١ − ك٢ = −٦ (٢)

٤

عند تقاطع المستقيمين

∴ (٠ ، ١ ، ٠) + ك$_1$ (١ ، ٢ ، -١)

= (١ ، ١ ، ١) + ك$_2$ (-٢ ، ٢ ، ٠)

∴ ك$_1$ = ١ - ٢ ك$_2$ ∴ ك$_1$ + ٢ ك$_2$ = ١ (١)

، ١ + ٢ ك$_1$ = ١ + ٢ ك$_2$

∴ ٢ ك$_1$ - ٢ ك$_2$ = ٠ (٢)

، - ك$_1$ = ١ ∴ ك$_1$ = -١ (٣)

ومن (١) ، (٢) ينتج أن

ك$_1$ = -١ ، ك$_2$ = ١

وهذه القيم تحقق معادلة (٣)

(س ، ص ، ع) = (٠ ، ١ ، ٠) + -١ (١ ، ٢ ، -١)

ومنها س = -١ ، ص = -١ ، ع = ١

∴ المستقيمان متقاطعان فى النقطة (-١ ، -١ ، ١)

∴ نقطة التقاطع هى $\left(\frac{٣٣}{٥} ، \frac{٣}{٥} ، \frac{٤١}{٥}\right)$

٦

بوضع $\frac{س + ٢}{٢} = \frac{ص}{-٢} = \frac{ع - ١}{٤}$ = ك$_1$

∴ س = ٢ ك$_1$ - ٢ ، ص = -٢ ك$_1$ ، ع = ٤ ك$_1$ + ١

، بوضع $\frac{س - ٣}{أ} = \frac{ص - ١}{٤} = \frac{ع - ٧}{٢}$ = ك$_2$

∴ س = أ ك$_2$ + ٣ ، ص = ٤ ك$_2$ + ١

، ع = ٢ ك$_2$ + ٧

، عند تقاطع المستقيمين

٢ ك$_1$ - ٢ = أ ك$_2$ + ٣ ∴ ٢ ك$_1$ - أ ك$_2$ = ٥ (١)

، -٢ ك$_1$ = ٤ ك$_2$ + ١

-٢ ك$_1$ - ٤ ك$_2$ = ١ (٢)

، ٤ ك$_1$ + ١ = ٢ ك$_2$ + ٧

، صـ = (٣ ، ٤ ، -١٢)

∴ ل$_1$ ، ل$_2$ لهما نفس متجه الاتجاه (١)

بوضع س = ٤ فى معادلة ل$_1$

∴ ص = ٦ ، ع = -٩

∴ النقطة (٤ ، ٦ ، -٩) ∈ ل$_1$

ونجد أن هذه النقطة تحقق معادلة ل$_2$

∴ (٤ ، ٦ ، -٩) ∈ لكل من ل$_1$ ، ل$_2$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن

ل$_1$ ، ل$_2$ يمثلان نفس الخط المستقيم.

٨

عند نقطة التقاطع : $\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ر_2}$

(٢ ، ٣ ، ٤) + ك$_1$ (-٤ ، -٤ ، ٥) = (-٦ ، -١٠ ، -١)

+ ك$_2$ (٠ ، ١ ، ٣)

∴ ٢ - ٤ ك$_1$ = -٦ ∴ ك$_1$ = ٢ (١)

٣ - ٤ ك$_1$ = -١٠ + ك$_2$

٤ ك$_1$ + ك$_2$ = ١٣ (٢)

٤ + ٥ ك$_1$ = -١ + ٣ ك$_2$

٥ ك$_1$ - ٣ ك$_2$ = -٥ (٣)

، ١ + ٢ ك$_1$ = ٢ + ١ ك$_2$

∴ ٢ ك$_1$ - ١ ك$_2$ = ٢ (١)

٢ + ٢ ك$_1$ = ٥ + ٥ ك$_2$

٢ ك$_1$ - ٥ ك$_2$ = ٣ (٢)

٣ + ٢ ك$_1$ = ٦ + ٣ ك$_2$

٢ ك$_1$ - ٣ ك$_2$ = ٣ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن ك$_1$ = ١ ، ك$_2$ = ٠

(س ، ص ، ع) = (١ ، ٢ ، ٣) + ١ (٢ ، ٣ ، ٣)

∴ نقطة التقاطع هى (٣ ، ٥ ، ٦)

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب

= (٣ ، ٥ ، ٦) - (٢ ، -١ ، ٣) = (١ ، ٦ ، ٣)

∴ المعادلة المتجهة للمستقيم المطلوب هى :

$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٣) + ك (١ ، ٦ ، ٣)

المعادلة البارامترية للمستقيم المطلوب هى :

س = ٢ + ك ، ص = -١ + ٦ ك ، ع = ٣ + ٣ ك

المعادلة الإحداثية للمستقيم المطلوب هى :

س - ٢ = $\frac{ص + ١}{٦} = \frac{ع - ٣}{٣}$

١٠

① لكى يكون المستقيمان متوازيين فإن :

$\frac{أ_1}{أ_2} = \frac{ب_1}{ب_2} = \frac{حـ_1}{حـ_2}$

② لكى يكون المستقيمان متعامدين فإن :

أ$_1$ أ$_2$ + ب$_1$ ب$_2$ + حـ$_1$ حـ$_2$ = ٠

③ يتقاطع المستقيمان ل$_1$ ، ل$_2$ إذا وجدت ك$_1$ ، ك$_2$ تحقق كلًا من المعادلات الثلاثة الآتية :

س$_1$ - س$_2$ = أ$_2$ ك$_2$ - أ$_1$ ك$_1$

، ص$_1$ - ص$_2$ = ب$_2$ ك$_2$ - ب$_1$ ك$_1$

، ع$_1$ - ع$_2$ = حـ$_2$ ك$_2$ - حـ$_1$ ك$_1$

١١

أ = (١ ، -٢ ، ١) ، ب = (-١ ، ٠ ، -٣)

حـ = (٣ ، ١ ، -٢) ، ء = (٨ ، ١ ، ٤)

① $\overrightarrow{أب}$ = (-١ ، ٠ ، -٣) - (١ ، -٢ ، ١)

= (-٢ ، ٢ ، -٤)

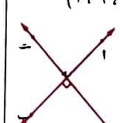
∴ $\overrightarrow{ى}$ = (-٢ ، ٢ ، -٤)

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (١ ، -٢ ، ١) + ك (-٢ ، ٢ ، -٤)

② $\overrightarrow{بحـ}$ = (٤ ، ١ ، ١)

∴ $\overrightarrow{ر}$ = (٨ ، ١ ، ٤) + ك (٤ ، ١ ، ١)

③ بفرض أن نقطة التقاطع ه



∴ معادلة $\overleftrightarrow{أب}$ هى :

$\overrightarrow{ر}$ = (١ ، -٢ ، ١)

+ ك (-٢ ، ٢ ، -٤)

∴ ه = (١ - ٢ ك ، -٢ + ٢ ك ، ١ - ٤ ك)

∴ $\overrightarrow{حـه} = \overrightarrow{ه} - \overrightarrow{حـ}$

= (-٢ - ٢ ك ، -٣ + ٢ ك ، ٣ - ٤ ك)

∵ $\overleftrightarrow{حـه} \perp \overleftrightarrow{أب}$ ∴ $\overrightarrow{ى_1} . \overrightarrow{ى_2}$ = ٠

∴ (-٢ ، ٢ ، -٤) . (-٢ - ٢ ك ، -٣ + ٢ ك ، ٣ - ٤ ك)

، -٣ - ٤ ك) = ٠

∴ ٤ + ٤ ك - ٦ + ٤ ك - ١٢ + ١٦ ك = ٠

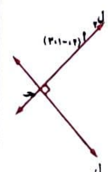
∴ ك = $\frac{٧}{١٢}$

∴ $\overrightarrow{حـه}$ = $\left(-\frac{١٩}{٦} ، \frac{-١١}{٦} ، \frac{٢}{٣}\right)$ = (-١٩ ، -١١ ، ٤)

∴ معادلة المستقيم هى :

$\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، ١ ، -٢) + كَ (-١٩ ، -١١ ، ٤)

١٢



نفرض أن المستقيمين متقاطعان فى نقطة حـ

∴ حـ ∈ المستقيم ل$_1$

∴ حـ = (١ + ٢ ك ، -١ + ٢ ك ، ٢ - ك)

متجه اتجاه ل$_2$ (المستقيم المطلوب) $\overrightarrow{ى_2} = \overrightarrow{أحـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{أ}$

∴ $\overrightarrow{ى_2}$ = (٢ ك - ١ ، ٢ ك ، - ك - ١)

∵ $\overrightarrow{ى_1}$ = (٢ ، ٢ ، -١)

∵ المستقيمين متعامدان

∴ $\overrightarrow{ى_1} . \overrightarrow{ى_2}$ = ٠

∴ (٢ ، ٢ ، -١) . (٢ ك - ١ ، ٢ ك ، - ك - ١) = ٠

∴ ٤ ك - ٢ + ٤ ك + ك + ١ = ٠

∴ ٩ ك = ١ ومنها ك = $\frac{١}{٩}$

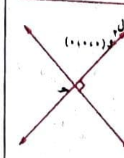
∴ $\overrightarrow{ى_2}$ = $\left(\frac{-٧}{٩} ، \frac{٢}{٩} ، \frac{-١٠}{٩}\right)$

= (-٧ ، ٢ ، -١٠)

∴ معادلة ل$_2$ هى :

$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، -١ ، ٣) + كَ (-٧ ، ٢ ، -١٠)

١٣



نفرض أن المستقيمين متقاطعان فى حـ

∵ حـ ∈ المستقيم ل$_1$

∴ حـ = (٣ + ٢ ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ ك)

∴ متجه اتجاه ل$_2$ (المستقيم المطلوب)

$\overrightarrow{ى_2} = \overrightarrow{وحـ}$

= $\overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{و}$ = (٣ + ٢ ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ ك)

، ∵ $\overrightarrow{ى_1}$ = (٢ ، ١ ، ٣)

∵ المستقيمين متعامدان ∴ $\overrightarrow{ى_1} . \overrightarrow{ى_2}$ = ٠

(٢ ، ١ ، ٣) . (٣ + ٢ ك ، ١ + ك ، ٤ + ٣ ك) = ٠

٦ + ٤ ك + ١ + ك + ١٢ + ٩ ك = ٠

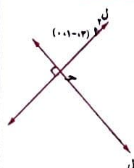
∴ ك = $\frac{-١٩}{١٤}$

∴ $\overrightarrow{ى_2}$ = $\left(\frac{٢}{٧} ، \frac{-٥}{١٤} ، \frac{-١}{١٤}\right)$ = (٤ ، -٥ ، -١)

∴ معادلة ل$_2$ هى :

$\overrightarrow{ر}$ = كَ (٤ ، -٥ ، -١)

١٤



نفرض أن المستقيمين متقاطعان فى نقطة حـ

حـ ∈ المستقيم ل$_1$

∴ حـ = (٢ + ك ، ١ + ٢ ك ، ١ - ك)

متجه اتجاه ل$_2$ (المستقيم المطلوب)

$\overrightarrow{ى_2} = \overrightarrow{أحـ}$ = (-١ + ك ، ٢ + ٢ ك ، ١ - ك)

∵ المستقيمين متعامدان ∴ $\overrightarrow{ى_1} . \overrightarrow{ى_2}$ = ٠

∴ (١ ، ٢ ، -١) . (-١ + ك ، ٢ + ٢ ك ، ١ - ك) = ٠

∴ -١ + ك + ٤ + ٤ ك - ١ + ك = ٠

∴ ك = $-\frac{١}{٣}$ ∴ $\overrightarrow{ى_2}$ = $\left(\frac{-٤}{٣} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣}\right)$

∴ معادلة ل$_2$ هى :

$\overrightarrow{ر}$ = (٣ ، -١ ، ٠) + ك $\left(\frac{-٤}{٣} ، \frac{٤}{٣} ، \frac{٤}{٣}\right)$

١٥

∵ $\overrightarrow{ى_1}$ = (٠ ، -٥ ، ٥) ، $\overrightarrow{ى_2}$ = (٥ ، -١ ، -١)

∵ $\overrightarrow{ى_1} . \overrightarrow{ى_2}$ = (٠ ، -٥ ، ٥) . (٥ ، -١ ، -١) = ٠

∴ المستقيمان متعامدان

عند نقطة التقاطع يكون : $\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ر_2}$

(٣ ، -٣ ، ٥) + ك$_1$ (٠ ، -٥ ، ٥) = (-٢ ، ٣ ، ١)

+ ك$_2$ (٥ ، -١ ، -١)

٣ = -٢ + ٥ ك$_2$ ∴ ك$_2$ = ١ (١)

-٣ - ٥ ك$_1$ = ٣ - ك$_2$ ∴ ٥ ك$_1$ - ك$_2$ = -٦ (٢)

٥ + ٥ ك$_1$ = ١ - ك$_2$ ∴ ٥ ك$_1$ + ك$_2$ = -٤ (٣)

من (٢) ، (٣) ينتج أن :

ك$_1$ = -١ ، ك$_2$ = ١

وهذا يتحقق مع معادلة (١) أيضًا

∴ المستقيمان متقاطعان ومتعامدان

، (س ، ص ، ع) = (٣ ، -٣ ، ٥) - (٠ ، -٥ ، ٥)

∴ إحداثيات نقطة التقاطع هى (٣ ، ٢ ، ٠)

١٦

∵ $\frac{٤}{١} \neq \frac{١}{-١} \neq \frac{٣}{٢}$

∴ المستقيمان غير متوازيين.

، عند نقطة التقاطع يكون : $\overrightarrow{ر_1} = \overrightarrow{ر_2}$

∴ (٣ ، -١ ، ٢) + ك$_1$ (٤ ، ١ ، ٣) = (٠ ، ٤ ، -١)

+ ك$_2$ (١ ، -١ ، ٢)

∴ ٣ + ٤ ك$_1$ = ك$_2$

∴ ٤ ك$_1$ - ك$_2$ = -٣ (١)

-١ + ك$_1$ = ٤ - ك$_2$ ك$_1$ + ك$_2$ = ٥ (٢)

٢ + ٣ ك$_1$ = -١ + ٢ ك$_2$

٣ ك$_1$ - ٢ ك$_2$ = -٣ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ك$_1$ = $\frac{٢}{٥}$ ، ك$_2$ = $\frac{٢٣}{٥}$

وبالتعويض فى معادلة (٣) : ٣ × $\frac{٢}{٥}$ - ٢ × $\frac{٢٣}{٥}$ ≠ -٣

أى أن هذه القيم لا تحقق معادلة (٣)

∴ المستقيمان متخالفان.

١٧

ى١ = (٢ ، -١ ، ١) ، ى٢ = (-٢ ، ٧ ، ١١)

∴ ى١ . ى٢ = (٢ ، -١ ، ١) . (-٢ ، ٧ ، ١١)

= ٢ × (-٢) + (-١) × ٧ + ١ × ١١

= صفر

∴ المستقيمان متعامدان

عند نقطة التقاطع يكون : ر١ = ر٢

∴ (١ ، ٢ ، ٤) + ك١ (٢ ، -١ ، ١)

= (١ ، ١ ، ١) + ك٢ (-٢ ، ٧ ، ١١)

∴ ١ + ٢ك١ = ١ - ٢ك٢

ك١ + ك٢ = ٠ (١)

٢ - ك١ = ١ + ٧ك٢

- ك١ - ٧ك٢ = -١ (٢)

٤ + ك١ = ١ + ١١ك٢

ك١ - ١١ك٢ = -٣ (٣)

ومن (١) ، (٢) ينتج أن :

ك١ = -١/٦ ، ك٢ = ١/٦

بالتعويض فى معادلة (٣) :

-١/٦ - ١١ × ١/٦ ≠ -٣

أى أن هذه القيم لا تحقق معادلة (٣)

∴ المستقيمان متخالفان.

١٨

ى١ = (-٥ ، ٧ ، ١) ، ى٢ = (٢ ، ١ ، ٣)

∵ ى١ . ى٢ = (-٥ ، ٧ ، ١) . (٢ ، ١ ، ٣)

= -١٠ + ٧ + ٣ = ٠

∴ المستقيمان متعامدان

عند نقطة التقاطع يكون : ر١ = ر٢

(-١ ، ٤ ، ٠) + ك١ (-٥ ، ٧ ، ١)

= (٠ ، ٠ ، ٠) + ك٢ (٢ ، ١ ، ٣)

∴ -١ - ٥ك١ = ٢ك٢

∴ ٥ك١ + ٢ك٢ = -١ (١)

، ٤ + ٧ك١ = ك٢ ∴ ٧ك١ - ك٢ = -٤ (٢)

، ك١ = ٣ك٢ ∴ ك١ - ٣ك٢ = ٠ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ك١ = -٩/١٩ ، ك٢ = ١٣/١٩

بالتعويض فى معادلة (٣) ينتج أن :

-٩/١٩ - ٣ × ١٣/١٩ ≠ ٠ أى أن هذه القيم

لا تحقق المعادلة (٣)

∴ المستقيمان متخالفان.

١٩

ى١ = (٣ ، ٤ ، ٥) - (٢ ، ٣ ، ٤) = (١ ، ١ ، ١)

ى٢ = (٤ ، ٠ ، ٠) - (-٢ ، -٣ ، ٦) = (٦ ، ٣ ، -٩)

ى١ . ى٢ = (١ ، ١ ، ١) . (٦ ، ٣ ، -٩)

= ٦ + ٣ - ٩ = ٠

∴ المستقيمان متعامدان

عند نقطة التقاطع يكون : ر١ = ر٢

∴ (٢ ، ٣ ، ٤) + ك١ (١ ، ١ ، ١)

= (٤ ، ٠ ، ٠ ، -٣) + ك٢ (٦ ، ٣ ، -٩)

∴ ٢ + ك١ = ٤ + ٦ك٢ ∴ ك١ - ٦ك٢ = ٢ (١)

، ٣ + ك١ = ٣ك٢

∴ ك١ - ٣ك٢ = -٣ (٢)

، ٤ + ك١ = -٣ - ٩ك٢

∴ ك١ + ٩ك٢ = -٧ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ك١ = -٨ ، ك٢ = -٥/٣

بالتعويض فى معادلة (٣)

-٨ + ٩ × -٥/٣ ≠ -٧

أى أن هذه القيم لا تحقق المعادلة (٣)

∴ المستقيمان متخالفان.

١٠

ى١ = (ن - ٢ ، ١ ، -١ - ٢ن)

ى٢ = (٢ ، ٢ن - ٣ ، -١)

∵ المستقيمان متعامدان ∴ ى١ . ى٢ = ٠

∴ (ن - ٢ ، ١ ، -١ - ٢ن) . (٢ ، ٢ن - ٣ ، -١) = ٠

∴ ٢ن - ٤ + ٢ن - ٣ + ١ + ٢ن = ٠

∴ ٦ن - ٦ = ٠ ∴ ن = ١

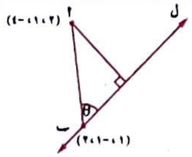
رابعاً: تمارين على المسافة بين نقطة ومستقيم فى الفراغ

١

(١) (جـ) (٢) (أ) (٣) (د) (٤) (جـ)

(٥) (جـ)

٢



ى = (٢ ، ٣ ، -٢)

ى = أب

= (-١ ، -٢ ، ٦)

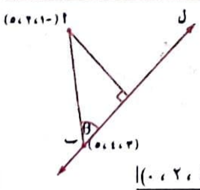
جتا θ = |(٢ ، ٣ ، -٢) . (-١ ، -٢ ، ٦)| / (√(٤ + ٩ + ٤) √(١ + ٤ + ٣٦))

∴ ق(د θ) ≈ ٤٠° ٤٥َ

أب = √(١² + ٢² + ٦²) = √٤١ وحدة طول.

∴ طول العمود = أب جا θ = √٤١ جا ٤٥َ ٤٠° ≈ ٤,١٨ وحدة طول.

٣



ى١ = (٢ ، -٣ ، ٦)

، ى٢ = أب

= (٤ ، ٢ ، ٠)

جتا θ = |(٢ ، -٣ ، ٦) . (٤ ، ٢ ، ٠)| / (√(٤ + ٩ + ٣٦) √(١٦ + ٤))

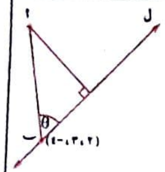
∴ ق(د θ) ≈ ٨٦° ٢٠َ

، أب = √(٤² + ٢²) = √٢٠ وحدة طول.

∴ طول العمود = أب جا θ = √٢٠ جا ٨٦° ٢٠َ

≈ ٤,٤٦ وحدة طول.

٤



المتجه ى = (-١ ، ٢ ، ٠)

- (١ ، -١ ، ٢)

= (-٢ ، ٣ ، -٢)

، ى = (٣ ، -٣ ، ٢)

جتا θ = |(-٢ ، ٣ ، -٢) . (٣ ، -٣ ، ٢)| / (√(٤ + ٩ + ٤) √(٩ + ٩ + ٤))

∴ ق(د θ) = ١٠° ٤٥َ

، ‖ى‖ = √(٤ + ٩ + ٤) = √١٧ وحدة طول.

∴ طول مسقط المتجه على المستقيم

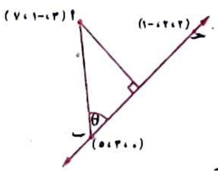
= أب جتا θ = √١٧ جتا ٤٥َ ١٠° = ٤,١ وحدة طول.

حل آخر:

طول المسقط = |(-٢ ، ٣ ، -٢) . (٣ ، -٣ ، ٢)| / √(٣² + (-٣)² + ٢²)

= ٤,١ وحدة طول.

٥



ى = أب = (-٣ ، ٤ ، -٢)

ى = بجـ = (٢ ، -١ ، -٦)

جتا θ = |(-٣ ، ٤ ، -٢) . (٢ ، -١ ، -٦)| / (√(٩ + ١٦ + ٤) √(٤ + ١ + ٣٦))

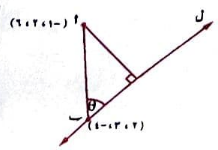
∴ ق(د θ) ≈ ٨٦° ٤٠َ

، أب = √(٩ + ١٦ + ٤) = √٢٩ وحدة طول.

∴ البعد العمودى = أب جا θ

= √٢٩ جا ٨٦° ٤٠َ = ٥,٣٨ وحدة طول.

٦

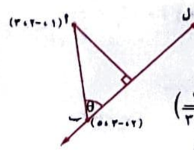


ى١ = أب

= (٣ ، ١ ، -١٠)

ى٢ = (٦ ، ٣ ، -٤)

٨



∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية مع المحاور

∴ ى = (١/√٣ ، ١/√٣ ، ١/√٣)

أى أن ى = (١ ، ١ ، ١)

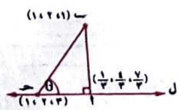
∴ ك = -٢/٣

∴ إحداثيات النقطة

أ = (٧/٣ ، ٤/٣ ، ١/٣)

∵ النقطة جـ تقع على المستقيم ولتكن (٣ ، ٢ ، ١)

∴ بجـ



١٢

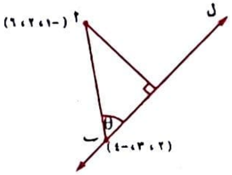
عند نقطة تقاطع المستقيمين :

ر١ = ر٢

(٤ ، -٢ ، -١) + ك١ (١ ، -٤ ، ٧)

= (١ ، -١ ، -١٠) + ك٢ (٢ ، -٣ ، ٨)

٦



هـ = أب

= (٣ ، ١ ، -١٠)

هـ = (٦ ، ٣ ، -٤)

، جتا θ = $\frac{|(٣ ، ١ ، -١٠) . (٦ ، ٣ ، -٤)|}{\sqrt{٩+١+١٠٠}\sqrt{٣٦+٩+١٦}}$

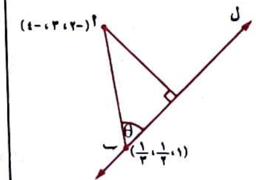
∴ ق(د θ) ≈ ٤١° ٥٢َ

، أب = $\sqrt{٩+١+١٠٠}$ = $\sqrt{١١٠}$ وحدة طول.

∴ بعد النقطة عن المستقيم = أب جا θ

= $\sqrt{١١٠}$ × جا ٤١° ٥٢َ ≈ ٧ وحدة طول.

٧



$\frac{س + ٢}{٣} = \frac{ص + \frac{٣}{٢}}{٢} = \frac{ع + \frac{٤}{٣}}{\frac{٥}{٣}}$

عند ص = $\frac{١}{٢}$

∴ س = ١ ، ع = $\frac{١}{٣}$

∴ المستقيم يمر بالنقطة (١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$)

هـ$_١$ = (٣ ، ٢ ، $\frac{٥}{٣}$)

هـ = أب = (٣ ، -٢$\frac{١}{٢}$ ، ٤$\frac{١}{٣}$)

جتا θ = $\frac{|(٣ ، ٢ ، \frac{٥}{٣}) . (٣ ، -٢\frac{١}{٢} ، ٤\frac{١}{٣})|}{\sqrt{٩+٤+\frac{٢٥}{٩}}\sqrt{٩+\frac{٢٥}{٤}+\frac{١٦٩}{٩}}}$

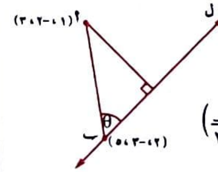
∴ ق(د θ) ≈ ٦١° ٢َ

، أب = $\sqrt{٩+\frac{٢٥}{٤}+\frac{١٦٩}{٩}}$ = $\frac{٣٥}{٦}$ وحدة طول

∴ بعد النقطة عن المستقيم = أب جا θ

= $\frac{٣٥}{٦}$ جا ٦١° ٢َ ≈ ٥,١ وحدة طول.

٨



∵ المستقيم يصنع زوايا متساوية مع المحاور

∴ هـ$_١$ = ($\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ ، $\frac{١}{\sqrt{٣}}$)

أى أن هـ$_١$ = (١ ، ١ ، ١)

، هـ$_٢$ = أب = (١ ، -١ ، ٢)

جتا θ = $\frac{|(١ ، ١ ، ١) . (١ ، -١ ، ٢)|}{\sqrt{١+١+١}\sqrt{١+١+٤}}$

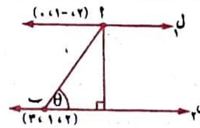
∴ ق(د θ) ≈ ٦١° ٥٢َ

، أب = $\sqrt{١+١+٤}$ = $\sqrt{٦}$ وحدة طول.

∴ بعد النقطة عن المستقيم = أب جا θ

= $\sqrt{٦}$ جا ٦١° ٥٢َ ≈ ٢,٢ وحدة طول.

٩



هـ = أب = (٠ ، ٢ ، ٣)

هـ = (٢ ، ١ ، ٣)

∴ جتا θ = $\frac{|(٠ ، ٢ ، ٣) . (٢ ، ١ ، ٣)|}{\sqrt{٠+٤+٩}\sqrt{٤+١+٩}}$

∴ ق(د θ) ≈ ٣٥° ٢٣َ

، أب = $\sqrt{٤+٩}$ = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

∴ البعد بين المستقيمين = أب جا θ

= $\sqrt{١٣}$ جا ٣٥° ٢٣َ ≈ ٢,١ وحدة طول.

١٠

النقطة أ = (٣ + ك ، ٢ + ك ، ١ + ك)

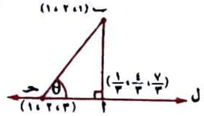
متجه اتجاه المستقيم ب أ = (٢ + ك ، ك ، ك)

∵ هـ = (١ ، ١ ، ١) متجه اتجاه المستقيم المعلوم

، ∵ أب ⊥ المستقيم ∴ ب أ . هـ = صفر

(٢ + ك ، ك ، ك) . (١ ، ١ ، ١) = ٠

٢ + ك + ك + ك = ٠



∴ ك = $\frac{-٢}{٣}$

∴ إحداثيات النقطة

أ = ($\frac{٧}{٣}$ ، $\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$)

∵ النقطة حـ تقع على المستقيم ولتكن (٣ ، ٢ ، ١)

∴ ب حـ = (٢ ، ٠ ، ٠)

جتا θ = $\frac{|(٢ ، ٠ ، ٠) . (١ ، ١ ، ١)|}{\sqrt{٤}\sqrt{١+١+١}}$

∴ ق(د θ) ≈ ٥٤° ٤٤َ ، ب حـ = $\sqrt{٤}$ = ٢ وحدة طول.

∴ بعد ب عن المستقيم = ب حـ جا θ = ٢ جا ٥٤° ٤٤َ

≈ ١,٦ وحدة طول.

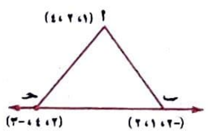
الطريقة الأخرى :

بعد ب عن المستقيم

= أب = $\sqrt{(\frac{٧}{٣}-١)^٢ + (\frac{٤}{٣}-٢)^٢ + (\frac{١}{٣}-١)^٢}$

≈ ١,٦ وحدة طول.

١١



متجه اتجاه المستقيم

ب حـ = ب حـ

= (٤ ، ٣ ، -٥)

∴ معادلة المستقيم ب حـ هى

ر = (٢ ، ٤ ، -٣) + ك (٤ ، ٣ ، -٥)

، متجه اتجاه المستقيم أ حـ = أ حـ = (١ ، ٢ ، -٧)

جتا حـ = $\frac{|(١ ، ٢ ، -٧) . (٤ ، ٣ ، -٥)|}{\sqrt{١+٤+٤٩}\sqrt{١٦+٩+٢٥}}$

∴ ق(د حـ) = ٣٠°

، أ حـ = $\sqrt{١+٤+٤٩}$ = $\sqrt{٥٤}$ وحدة طول.

، ب حـ = $\sqrt{١٦+٩+٢٥}$ = ٥$\sqrt{٢}$ وحدة طول.

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ × $\sqrt{٥٤}$ × ٥$\sqrt{٢}$ × جا ٣٠°

= $\frac{١٥\sqrt{٣}}{٢}$ وحدة مساحة.

١٢

عند نقطة تقاطع المستقيمين :

ر$_١$ = ر$_٢$

(٤ ، -٣ ، -١) + ك$_١$ (١ ، -٤ ، ٧)

= (١ ، -١ ، -١٠) + ك$_٢$ (٢ ، -٣ ، ٨)

∴ ٤ + ك$_١$ = ١ + ٢ ك$_٢$ ∴ ك$_١$ - ٢ ك$_٢$ = -٣ (١)

-٣ - ٤ ك$_١$ = -١ - ٣ ك$_٢$

∴ ٤ ك$_١$ - ٣ ك$_٢$ = -٢ (٢)

-١ + ٧ ك$_١$ = -١٠ + ٨ ك$_٢$

٧ ك$_١$ - ٨ ك$_٢$ = -٩ (٣)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ك$_١$ = ١ ، ك$_٢$ = ٢

بالتعويض فى معادلة (٣)

∴ ٧ × ١ - ٨ × ٢ = -٩

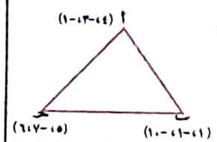
∵ هذه القيم تحقق معادلة (٣)

∴ المستقيمان متقاطعان

∴ (س ، ص ، ع) = (٤ ، -٣ ، -١) + ١ (١ ، -٤ ، ٧)

أى أن نقطة التقاطع حـ (٥ ، -٧ ، ٦)

متجه اتجاه أ حـ = (١ ، -٤ ، ٧)



، أ حـ = $\sqrt{٦٦}$ وحدة طول.

، متجه اتجاه ب حـ

= (٤ ، -٦ ، ١٦)

، ب حـ = $\sqrt{٣٠٨}$ وحدة طول

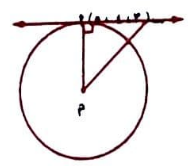
جتا θ = $\frac{|(١ ، -٤ ، ٧) . (٤ ، -٦ ، ١٦)|}{\sqrt{١+١٦+٤٩}\sqrt{١٦+٣٦+٢٥٦}}$

∴ ق(د حـ) ≈ ١٠° ٥٥َ

∴ مساحة Δ أ ب حـ = $\frac{١}{٢}$ $\sqrt{٦٦}$ × $\sqrt{٣٠٨}$ × جا ١٠° ٥٥َ

≈ ١٣,٥ وحدة مساحة.

١٣



مركز الكرة م = (-١ ، ٢ ، ٥)

معادلة المستقيم هى :

ر = (٣ ، ٤ ، ٥) + ك (٢ ، -٣ ، ٦)

متجه اتجاه المستقيم ب م = (-٤ ، -٢ ، ٠)

، ب م = √٢٠ وحدة طول

متجه اتجاه المستقيم ل = (٢ ، -٣ ، ٦)

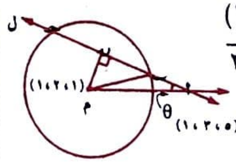
∴ جتا ب = |(-٤ ، -٢ ، ٠) . (٢ ، -٣ ، ٦)| ÷ (√(١٦ + ٤) √(٤ + ٩ + ٣٦))

ق (∠ب) ≈ ٨٦° ٢٠َ

∴ نق = ب م جا ب = √٢٠ جا ٨٦° ٢٠َ

≈ ٤,٤٦ وحدة طول.

١٤



مركز الكرة = (١ ، ٢ ، ١)

، نق = √(١ + ٤ + ١ + ٣٩)

= ٣√٥ وحدة طول

معادلة المستقيم ل :

ر = (٥ ، ٣ ، ١) + ك (١ ، ٣ ، -٢)

∴ متجه اتجاه المستقيم أم = (-٤ ، -١ ، ٠)

، أم = √١٧ وحدة طول

∴ جتا θ = |(-٤ ، -١ ، ٠) . (١ ، ٣ ، -٢)| ÷ (√(١٦ + ١) √(١ + ٩ + ٤))

ق (∠θ) ≈ ٦٣° ١َ

∴ م ن = أ م جا θ = √١٧ جا ٦٣° ١َ

≈ ٣,٦٧ وحدة طول

∴ ن ب = √((نق)^2 − (م ن)^2) ≈ ٥,٦

∴ ب حـ = ٢ × ٥,٦ = ١١,٢ وحدة طول.

حل آخر :

بوضع (س − ٥)/١ = (ص − ٣)/٣ = (ع − ١)/−٢ = ك

∴ س = ٥ + ك ، ص = ٣ + ٣ ك ، ع = ١ − ٢ ك

وبالتعويض فى معادلة الكرة

∴ (٥ + ك)^2 + (٣ + ٣ ك)^2 + (١ − ٢ ك)^2 − ٢ (٥ + ك)

− ٤ (٣ + ٣ ك) − ٢ (١ − ٢ ك) − ٣٩ = ٠

∴ ك^2 + ك − ٢ = ٠ ∴ (ك + ٢) (ك − ١) = ٠

∴ ك = −٢ أو ك = ١

∴ نقط التقاطع هى (٥ − ٢ ، ٣ − ٦ ، ١ + ٤)

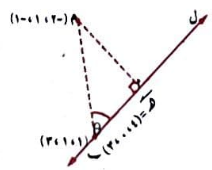
= (٣ ، −٣ ، ٥) ، (٥ + ١ ، ٣ + ٣ ، ١ − ٢)

= (٦ ، ٦ ، −١)

∴ البعد بين النقطتين = √((٣)^2 + (٩)^2 + (−٦)^2)

= √١٢٦ ≈ ١١,٢ وحدة طول.

١٥



بفرض م مركز الكرة

، أ نقطة التماس

∴ أم ⊥ ل

م ب = (١ ، ١ ، ٣) − (−٢ ، ١ ، −١)

= (٣ ، ٠ ، ٤)

∴ جتا θ = |(٣ ، ٠ ، ٤) . (٤ ، ٠ ، ٣)| ÷ (√(٩ + ١٦) √(١٦ + ٩)) = ٢٤/٢٥

∴ θ ≈ ١٦° ١٥َ ٣٧ً

∴ أ م = م ب جا θ = √(٩ + ١٦) جا ١٦° ١٥َ ٣٧ً

= ١,٤ وحدة طول.

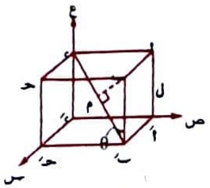
∴ طول نصف قطر الكرة = ١,٤ وحدة طول.

، مركزها (−٢ ، ١ ، −١)

∴ معادلة الكرة :

(س + ٢)^2 + (ص − ١)^2 + (ع + ١)^2 = ٤٩/٢٥

١٦



من هندسة الشكل :

حـ = (ل ، ل ، ٠)

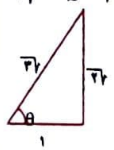
، ب = (ل ، ل ، ل)

، ء = (٠ ، ٠ ، ل)

∴ متجه اتجاه حـ ء = (ل ، ل ، − ل)

متجه اتجاه ب ب = (٠ ، ٠ ، ل)

جتا θ = |(٠ ، ٠ ، ل) . (ل ، ل ، − ل)| ÷ (√ل^2 √(ل^2 + ل^2 + ل^2)) = ل^2 ÷ (√٣ ل^2) = ١/√٣



∴ ق (∠θ) ≈ ٥٤° ٤٤َ ٨ً

∴ ب م = ل جا θ

ب م = ل × √٢/√٣ = (√٦/٣) ل

∴ طول العمود الساقط من الرأس على قطر غير مار به

= (√٦/٣) ل

١٧

بوضع (س − ١)/٢ = (ص − ٢)/٣ = (ع + ١)/٤ = ك

∴ س = ٢ ك + ١ ، ص = ٣ ك + ٢

، ع = ٤ ك − ١

∴ أى نقطة على المستقيم تكون

(٢ ك + ١ ، ٣ ك + ٢ ، ٤ ك − ١)

وبفرض أن ل بعد أى نقطة عن محور السينات

∴ ل^2 = (٣ ك + ٢)^2 + (٤ ك − ١)^2

∴ ٢ ل (ءل/ءك) = ٢ (٣ ك + ٢) × ٣ + ٢ (٤ ك − ١) × ٤

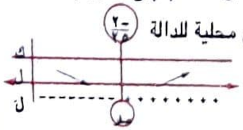
= ١٨ ك + ١٢ + ٣٢ ك − ٨ = ٥٠ ك + ٤

وبوضع ءل/ءك = ٠ ∴ ك = −٢/٢٥

، ∵ إشارة ل َ تتغير من السالب إلى الموجب

∴ توجد قيمة صغرى محلية للدالة

عند ك = −٢/٢٥



، ل^2 = (٣ × −٢/٢٥ + ٢)^2 + (٤ × −٢/٢٥ − ١)^2 = ١٢١/٢٥

∴ ل = ٢,٢ وحدة طولية

∴ أقصر بعد بين المستقيم ومحور السينات

= ٢,٢ وحدة طولية

حلول تمارين 6

١

① (جـ)	② (د)	③ (ب)	④ (أ)
⑤ (ب)	⑥ (جـ)	⑦ (جـ)	⑧ (ب)
⑨ (جـ)	⑩ (أ)	⑪ (جـ)	⑫ (أ)

٢

ن . ر = ن . أ

(١ ، −٢ ، ٣) . ر = (١ ، −٢ ، ٣) . (٢ ، −٣ ، ١)

∴ (١ ، −٢ ، ٣) . ر = ١١

٣

∵ ن = (١ ، ٢ ، −٣)

∴ (١ ، ٢ ، −٣) . ر = (١ ، ٢ ، −٣) . (٠ ، ٠ ، ٠)

س + ٢ ص − ٣ ع = ٠

٤

(١ ، −١ ، ٣) . ر = (١ ، −١ ، ٣) . (−٣ ، ٤ ، ٢)

(١ ، −١ ، ٣) . ر = −١ (الصورة المتجهة)

١ (س + ٣) − (ص − ٤) + ٣ (ع − ٢) = ٠

(الصورة القياسية)

س − ص + ٣ ع + ١ = ٠ (الصورة العامة)

٥

(٢ ، −٣ ، ٤) . ر = (٢ ، −٣ ، ٤) . (١ ، −١ ، ٤)

(٢ ، −٣ ، ٤) . ر = ٢١ (الصورة المتجهة)

٢ (س − ١) − ٣ (ص + ١) + ٤ (ع − ٤) = ٠

(الصورة القياسية)

، ٢ س − ٣ ص + ٤ ع − ٢١ = ٠ (الصورة العامة)

① بالتعويض بالنقطة (٢ ، ٢ ، ١)

∴ ٢ × ٢ − ٣ × ٢ + ٤ × ١ − ٢١ ≠ ٠

∴ النقطة ∉ للمستوى

② ∵ (٣ ، −٥ ، −٢) . (٢ ، −٣ ، ٤)

= ٦ + ١٥ − ٨ = ١٣ ≠ ٠

∴ المتجه ى لا يوازى المستوى.

٦

$\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{٤} + \frac{\text{ع}}{٥} = ١$

١٠ س + ٥ ص + ٤ ع − ٢٠ = ٠ (الصورة العامة)

، المستوى يمر بالنقطة (٢ ، ٠ ، ٠)

(١٠ ، ٥ ، ٤) . ر = (١٠ ، ٥ ، ٤) . (٢ ، ٠ ، ٠)

(١٠ ، ٥ ، ٤) . ر = ٢٠ (الصورة المتجهة)

١٠ (س − ٢) + ٥ ص + ٤ ع = ٠ (الصورة القياسية)

٧

$\frac{\text{س}}{١} + \frac{\text{ص}}{٢} + \frac{\text{ع}}{٣} = ١$

٦ س + ٣ ص + ٢ ع = ٦ (الصورة العامة)

، ∵ المستوى يمر بالنقطة (١ ، ٠ ، ٠)

(٦ ، ٣ ، ٢) . ر = (٦ ، ٣ ، ٢) . (١ ، ٠ ، ٠)

(٦ ، ٣ ، ٢) . ر = ٦ (الصورة المتجهة)

٦ (س − ١) + ٣ ص + ٢ ع = ٠ (الصورة القياسية)

٨

① $\begin{vmatrix} \text{س} - ٢ & \text{ص} + ١ & \text{ع} \\ -٣ & ٤ & ٤ \\ ١ & ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٠$

∴ ٤ (س − ٢) + ١٠ (ص + ١) − ٧ ع = ٠

(الصورة القياسية)

، ٤ س + ١٠ ص − ٧ ع + ٢ = ٠ (الصورة العامة)

، (٤ ، ١٠ ، −٧) . ر = −٢ (الصورة المتجهة)

② $\begin{vmatrix} \text{س} - ١ & \text{ص} - ٣ & \text{ع} - ٥ \\ -٢ & -١ & -١ \\ ٣ & ١ & -٥ \end{vmatrix} = ٠$

∴ ٦ (س − ١) −١٣ (ص − ٣) + (ع − ٥) = ٠

(الصورة القياسية)

، ٦ س − ١٣ ص + ع + ٢٨ = ٠ (الصورة العامة)

، (٦ ، −١٣ ، ١) . ر = −٢٨ (الصورة المتجهة)

③ $\begin{vmatrix} \text{س} - ٣ & \text{ص} & \text{ع} - ٤ \\ -١ & ١ & -٣ \\ -٣ & ٠ & -٤ \end{vmatrix} = ٠$

∴ −٤ (س − ٣) + ٥ ص + ٣ (ع − ٤) = ٠

(الصورة القياسية)

، −٤ س + ٥ ص + ٣ ع = ٠ (الصورة العامة)

، (−٤ ، ٥ ، ٣) . ر = ٠ (الصورة المتجهة)

٩

① (٣ ، ٠ ، ٠) ، (٣ ، ٤ ، ٥) ، (٣ ، ٩ ، ١٢)

② (٥ ، −٢ ، ٧) ، (٠ ، −٢ ، ٨) ، (١٠ ، −٢ ، −٩)

③ (٥ ، ٠ ، ٧) ، (٠ ، $\frac{٥}{٣}$ ، ١١) ، (−١ ، ٢ ، ٩)

④ (٠ ، ٠ ، $\frac{٤}{٣}$) ، (٠ ، −٤ ، ٠) ، (٢ ، ٠ ، ٠)

«توجد إجابات أخرى»

١٠

$م_١$ = (−٣ ، ٤ ، ١) ، $م_٢$ = (٥ ، −٢ ، ١)

∴ منتصف $م_١ م_٢$ = $\left(\frac{٥ - ٣}{٢} ، \frac{٤ - ٢}{٢} ، \frac{١ + ١}{٢}\right)$

= (١ ، ١ ، ١)

∴ ٢ أ − ٣ أ + ٤ أ + ٦ = ٠

∴ ٣ أ = −٦ ∴ أ = −٢

١١

بالتعويض بالنقطة أ

٢ (٣) − ٣ (−٢) + ٤ (٥) − ٥ = ٢٧ ∴ أ ∉ للمستوى

، بالتعويض بالنقطة ب

٢ (−٤) − ٣ (١) − ٥ = −١٦ ∴ ب ∉ للمستوى

، بالتعويض بالنقطة حـ

٢ (٦) − ٣ (٥) + ٤ (−١) − ٥ = −١٢

∴ النقطة حـ ∉ للمستوى ، بالتعويض بالنقطة ء

∴ ٢ (−٣) − ٣ (−٥) + ٤ (٢) − ٥ = ١٢

∴ النقطة ء ∉ للمستوى

بالتعويض بالنقطة هـ

∴ ٢ (٤) − ٣ (−٧) + ٤ (١٠) − ٥ = ٦٤

∴ النقطة هـ ∉ للمستوى

∴ النقط أ ، ء ، هـ تقعان فى نفس الجهة من المستوى بينما النقطتان ب ، حـ تقعان فى الجهة الأخرى من المستوى.

١٢

∵ ٢ س + ٣ ص − ع = ٦ (بالقسمة ÷ ٦)

∴ $\frac{\text{س}}{٣} + \frac{\text{ص}}{٢} + \frac{\text{ع}}{-٦} = ١$

∴ المستوى يقطع من محاور الإحداثيات س ، ص ، ع الأجزاء ٣ ، ٢ ، −٦ على الترتيب

١٣

① ع = ٠ ② ع = ٢

③ ص = ٠ ، ص = ٥ ، س = ٠

١٤

① (ب) ② (جـ) ③ (ب) ④ (ب)

⑤ (ب) ⑥ (جـ) ⑦ (جـ) ⑧ (جـ)

⑨ (ب) ⑩ (جـ) ⑪ (د) ⑫ (جـ)

⑬ (جـ) ⑭ (جـ) ⑮ (د) ⑯ (د)

⑰ (د) ⑱ (جـ) ⑲ (ب) ⑳ (أ)

(٢١) (ب) (٢٢) (ب) (٢٣) (جـ) (٢٤) (د)

(٢٥) (ب) (٢٦) (أ) (٢٧) (أ) (٢٨) (أ)

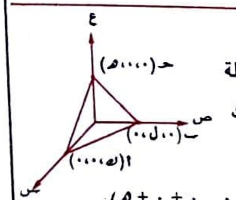
(٢٩) (أ) (٣٠) (جـ) (٣١) (د) (٣٢) (جـ)

(٣٣) (أ) (٣٤) (جـ) (٣٥) (جـ) (٣٦) (أ)

(٣٧) (جـ) (٣٨) (جـ) (٣٩) (أ) (٤٠) (أ)

(٤١) (ب)

١٥



∵ (م ، ن ، ر) هى نقطة تلاقى متوسطات المثلث

∴ (م ، ن ، ر)

= $\left(\frac{ك + ٠ + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ل + ٠}{٣} ، \frac{٠ + ٠ + هـ}{٣}\right)$

∴ ك = ٣ م ، ل = ٣ ن ، هـ = ٣ ر

∴ معادلة المستوى هى $\frac{\text{س}}{ك} + \frac{\text{ص}}{ل} + \frac{\text{ع}}{هـ} = ١$

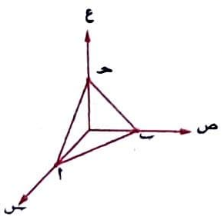
∴ $\frac{\text{س}}{٣ م} + \frac{\text{ص}}{٣ ن} + \frac{\text{ع}}{٣ ر} = ١$ (بالضرب × ٣)

∴ $\frac{\text{س}}{م} + \frac{\text{ص}}{ن} + \frac{\text{ع}}{ر} = ٣$

١٦

∵ ٣ س + ٢ ص + ٤ ع = ١٢

(بالقسمة ÷ ١٢)



∴ $\frac{\text{س}}{٤} + \frac{\text{ص}}{٦} + \frac{\text{ع}}{٣} = ١$

∴ أ = (٤ ، ٠ ، ٠)

ب = (٠ ، ٦ ، ٠)

حـ = (٠ ، ٠ ، ٣)

∵ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (−٤ ، ٦ ، ٠)

$\overrightarrow{\text{أحـ}}$ = (−٤ ، ٠ ، ٣)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٤ & ٦ & ٠ \\ -٤ & ٠ & ٣ \end{vmatrix}$

= ١٨ $\overrightarrow{\text{س}}$ + ١٢ $\overrightarrow{\text{ص}}$ + ٢٤ $\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ $\|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}}\| = \sqrt{(١٨)^{٢} + (١٢)^{٢} + (٢٤)^{٢}}$

$= ٦\sqrt{٢٩}$

∴ مساحة △ أ ب حـ $= \frac{١}{٢} \|\overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{أحـ}}\|$

$= ٣\sqrt{٢٩}$ وحدة مربعة.

١٧

$\overrightarrow{\text{ن}} = (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{حـ})$

∴ متجه اتجاه المستقيم المطلوب = (أ ، ب ، حـ)

∴ معادلة المستقيم هى : $\overrightarrow{\text{ر}} = (\text{س}_١ ، \text{ص}_١ ، \text{ع}_١) + \text{ك} (\text{أ} ، \text{ب} ، \text{حـ})$

١٨

① ∵ المستويان متوازيان

∴ $\overrightarrow{\text{ن}_١} = \overrightarrow{\text{ن}_٢} = (١ ، -٢ ، ٢)$

∴ معادلة المستوى : $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

$(١ ، -٢ ، ٢) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = (١ ، -٢ ، ٢) \cdot (١ ، -١ ، ٢)$

$(١ ، -٢ ، ٢) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = ٧$

$(١ ، -٢ ، ٢) \cdot (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع}) = ٧$

∴ س − ٢ ص + ٢ ع − ٧ = ٠

② $\overrightarrow{\text{ن}_١} = \overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}} = (١ ، ١ ، -١)$

، $\overrightarrow{\text{ن}_٢} = (١ ، ١ ، ١)$

∵ $\overrightarrow{\text{ن}_١} \times \overrightarrow{\text{ن}_٢} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$

$= ٢\,\overrightarrow{\text{س}} - ٢\,\overrightarrow{\text{ص}}$

∴ ن = (٢ ، -٢ ، ٠) ، أ = (١ ، ٢ ، -٣)

∴ معادلة المستوى المطلوب : $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

$(٢ ، -٢ ، ٠) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = (٢ ، -٢ ، ٠) \cdot (١ ، ٢ ، -٣)$

$(٢ ، -٢ ، ٠) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = -٢$

$(٢ ، -٢ ، ٠) \cdot (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع}) = -٢$

٢ س − ٢ ص + ٢ = ٠

∴ س − ص + ١ = ٠

③ $\overrightarrow{\text{ن}} = (٢ ، ١ ، -١) \times (٣ ، ٦ ، -٢)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٢ & ١ & -١ \\ ٣ & ٦ & -٢ \end{vmatrix}$

$= ٤\,\overrightarrow{\text{س}} + \overrightarrow{\text{ص}} + ٩\,\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ معادلة المستوى المطلوب : $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

$(٤ ، ١ ، ٩) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = (٤ ، ١ ، ٩) \cdot (١ ، ٢ ، ٣)$

$(٤ ، ١ ، ٩) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = ٣٣$

$(٤ ، ١ ، ٩) \cdot (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع}) = ٣٣$

٤ س + ص + ٩ ع − ٣٣ = ٠

④ $\text{ن}_١ = (١ ، -٢ ، ٥) - (٢ ، ٢ ، ٣) = (-١ ، -٤ ، ٢)$

$\text{ن}_٢ = (٣ ، -١ ، ٠)$

∴ $\text{ن} = \overrightarrow{\text{ن}_١} \times \overrightarrow{\text{ن}_٢} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & -٤ & ٢ \\ ٣ & -١ & ٠ \end{vmatrix}$

$= ٢\,\overrightarrow{\text{س}} + ٦\,\overrightarrow{\text{ص}} + ١٣\,\overrightarrow{\text{ع}}$

∴ معادلة المستوى المطلوب : $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

$(٢ ، ٦ ، ١٣) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = (٢ ، ٦ ، ١٣) \cdot (١ ، -٢ ، ٥)$

$(٢ ، ٦ ، ١٣) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = ٥٥$

$(٢ ، ٦ ، ١٣) \cdot (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع}) = ٥٥$

٢ س + ٦ ص + ١٣ ع − ٥٥ = ٠

⑤ $\text{ن} = (٤ ، -١ ، ٢) \times (١ ، ٠ ، ٠)$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٤ & -١ & ٢ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{vmatrix}$

$= ٢\,\overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}$

∴ معادلة المستوى المطلوب : $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

$(٠ ، ٢ ، ١) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = (٠ ، ٢ ، ١) \cdot (٤ ، -١ ، ٢)$

$(٠ ، ٢ ، ١) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = ٠$

٢ ص + ع = ٠

حل آخر :

∵ المستوى يحوى محور السينات

∴ معادلته هى ب ص + حـ ع = ٠

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{حـ}}$ ص + ع = ٠

، ∵ المستوى يمر بالنقطة (٤ ، -١ ، ٢)

∴ $\frac{\text{ب}}{\text{حـ}} \times -١ + ٢ = ٠$ ∴ $\frac{\text{ب}}{\text{حـ}} = ٢$

∴ معادلة المستوى هى : ٢ ص + ع = ٠

⑥ ∵ مسقط نقطة الأصل على المستوى هى (٢ ، ٣ ، -٥)

∴ $\overrightarrow{\text{ن}} = (٢ ، ٣ ، -٥) - (٠ ، ٠ ، ٠)$

$= (٢ ، ٣ ، -٥)$

∴ معادلة المستوى المطلوب : $\overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = \overrightarrow{\text{ن}} \cdot \overrightarrow{\text{أ}}$

$(٢ ، ٣ ، -٥) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = (٢ ، ٣ ، -٥) \cdot (٢ ، ٣ ، -٥)$

$(٢ ، ٣ ، -٥) \cdot \overrightarrow{\text{ر}} = ٣٨$

$(٢ ، ٣ ، -٥) \cdot (\text{س} ، \text{ص} ، \text{ع}) = ٣٨$

٢ س + ٣ ص − ٥ ع − ٣٨ = ٠

⑦ $\frac{\text{س}}{٢} + \frac{\text{ص}}{-٣} + \frac{\text{ع}}{٥} = ١$

⑧ نفرض أن طول الجزء المقطوع من محاور الإحداثيات = أ

∴ معادلة المستوى : $\frac{\text{س}}{\text{أ}} + \frac{\text{ص}}{\text{أ}} + \frac{\text{ع}}{\text{أ}} = ١$

، ∵ (٣ ، ٥ ، -٧) ∈ للمستوى

∴ $\frac{٣}{\text{أ}} + \frac{٥}{\text{أ}} + \frac{-٧}{\text{أ}} = ١$ ∴ أ = ١

∴ معادلة المستوى المطلوب : س + ص + ع = ١

⑨ نفرض أن طول الجزء المقطوع من محورى الإحداثيات س ، ص = ك ، الجزء المقطوع من المحور ع = م

∴ معادلة المستوى هى : $\frac{\text{س}}{\text{ك}} + \frac{\text{ص}}{\text{ك}} + \frac{\text{ع}}{\text{م}} = ١$

∵ (٣ ، ٥ ، ١) ∈ للمستوى

$\frac{٣}{\text{ك}} + \frac{٥}{\text{ك}} + \frac{١}{\text{م}} = ١$

$\frac{٨}{\text{ك}} + \frac{١}{\text{م}} = ١$ ∴ $\frac{١}{\text{م}} = ١ - \frac{٨}{\text{ك}}$

∴ $\frac{٨}{\text{م}} = ٨ - \frac{٦٤}{\text{ك}}$ (١)

∵ (٧ ، ٧ ، ٨) ∈ للمستوى

∴ $\frac{٧}{\text{ك}} + \frac{٧}{\text{ك}} + \frac{٨}{\text{م}} = ١$

∴ $\frac{١٤}{\text{ك}} + \frac{٨}{\text{م}} = ١$ ∴ $\frac{٨}{\text{م}} = ١ - \frac{١٤}{\text{ك}}$ (٢)

من (١) ، (٢) ، ينتج أن :

$٨ - \frac{٦٤}{\text{ك}} = ١ - \frac{١٤}{\text{ك}}$ $\frac{٧}{١} = \frac{٥٠}{\text{ك}}$

∴ $\text{ك} = \frac{٥٠}{٧}$ من (١) $\text{م} = \frac{-٢٥}{٣}$

∴ معادلة المستوى هى :

$\frac{\text{س}}{\frac{٥٠}{٧}} + \frac{\text{ص}}{\frac{٥٠}{٧}} + \frac{\text{ع}}{\frac{-٢٥}{٣}} = ١$

أى أن : $\frac{٧\,\text{س}}{٥٠} + \frac{٧\,\text{ص}}{٥٠} - \frac{٣\,\text{ع}}{٢٥} = ١$

⑩ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\frac{\text{س}}{-٢} + \frac{\text{ص}}{\frac{٢}{٣}} + \frac{\text{ع}}{\text{ك}} = ١$

∴ $\left(-\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢} ، \frac{١}{\text{ك}}\right)$ متجه اتجاه عمودى للمستوى

، ∵ المستوى المطلوب عموديًا على المستوى

٢ س − ٢ ص + ٤ ع − ٥ = ٠

∴ $\left(-\frac{١}{٢} ، \frac{٣}{٢} ، \frac{١}{\text{ك}}\right) \cdot (٢ ، -٢ ، ٤) = ٠$

∴ $-١ - ٣ + \frac{٤}{\text{ك}} = ٠$ ∴ ك = ١

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\frac{\text{س}}{-٢} + \frac{\text{ص}}{\frac{٢}{٣}} + \text{ع} = ١$ (وبالضرب × ٢)

− س + ٣ ص + ٢ ع − ٢ = ٠

⑪ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\frac{\text{س}}{-٣} + \frac{\text{ص}}{\text{ك}} + \frac{\text{ع}}{٢} = ١$

، ∵ المستوى يمر بـ (٦ ، -١٠ ، ١)

∴ $\frac{٦}{-٣} + \frac{-١٠}{\text{ك}} + \frac{١}{٢} = ١$ ∴ ك = -٤

∴ المعادلة المطلوبة هى :

$\frac{\text{س}}{-٣} + \frac{\text{ص}}{-٤} + \frac{\text{ع}}{٢} = ١$

(١٢) معادلة المستوى المطلوب :

$\frac{\text{س}}{٥} + \frac{\text{ص}}{-٧} + \frac{\text{ع}}{\text{ل}} = ١$

، ∵ (١ ، ١ ، ٢) يمر بها المستوى

∴ $\frac{١}{٥} + \frac{١}{-٧} + \frac{٢}{\text{ل}} = ١$ ∴ $\text{ل} = \frac{٧٠}{٣٣}$

∴ المستوى المطلوب هو : $\frac{\text{س}}{٥} + \frac{\text{ص}}{-٧} + \frac{\text{ع}}{\frac{٧٠}{٣٣}} = ١$

١٩

(١) ص = ٥ ، ع = ٤ (٢) س = ٣ ، ع = ٠

(٣) س = ٣ ، ص = ٥ (٤) ع = ٤ (٥) ع = ٠

(٦) $\frac{\text{س}}{٣} = \frac{\text{ص} - ٥}{-٥} = \frac{\text{ع} - ٤}{-٤}$

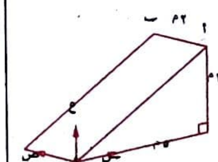
(٧) ٤ ص - ٥ ع = ٠

٢٠

∵ و (٠ ، ٠ ، ٠) ، أ (٥ ، ٠ ، ٣) ، ب (٥ ، ٢ ، ٣)

(١) متجه الاتجاه العمودى على المستوى المائل

$\overrightarrow{\text{ن}} = \overrightarrow{\text{وأ}} \times \overrightarrow{\text{وب}}$



$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٥ & ٠ & ٣ \\ ٥ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$

$= -٦ \overrightarrow{\text{س}} + ١٠ \overrightarrow{\text{ع}}$

، ∵ المستوى يمر بنقطة الأصل

∴ معادلة المستوى المائل هى -٦ س + ١٠ ع = ٠

(٢) متجه اتجاه المستقيم $\overleftrightarrow{\text{وأ}}$ هو (٥ ، ٠ ، ٣)

∴ معادلة خط أكبر ميل هو $\overrightarrow{\text{ر}} = \text{ل}$ (٥ ، ٠ ، ٣)

٢١

يتقاطع المستقيمان عندما $\overrightarrow{\text{ر}_١} = \overrightarrow{\text{ر}_٢}$

∴ (٣ ، ١ ، -١) + $\text{ل}_١$ (١ ، ٢ ، ٣) = (٢ ، ٥ ، ٠) + $\text{ل}_٢$ (١ ، -١ ، ١)

∴ $\text{ل}_١ - \text{ل}_٢ = -١$ (١)

، $٢ \text{ل}_١ + \text{ل}_٢ = ٤$ (٢)

، $٣ \text{ل}_١ - \text{ل}_٢ = ١$ (٣)

بحل المعادلتين (١) ، (٢) :

∴ $\text{ل}_١ = ١$ ، $\text{ل}_٢ = ٢$

وبالتعويض فى (٣) :

∴ ٣ (١) - (٢) = ١ (تحقق المعادلة)

∴ المستقيمان متقاطعان

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستقيمين المتقاطعين

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & -١ & ١ \end{vmatrix} = (٥ ، ٢ ، -٣)$

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

(٥ ، ٢ ، -٣) . $\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٥ ، ٢ ، -٣) . (٣ ، ١ ، -١)

∴ ٥ س + ٢ ص - ٣ ع - ٢٠ = ٠

٢٢

$\text{ل}_١$: ٢ س = ٣ ص = ٤ ع

، $\text{ل}_٢$: ٣ س = ٢ ص = ٥ ع

يمران بنقطة الأصل

∴ المستقيمان متقاطعان

∴ متجه الاتجاه العمودى على مستويهما

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{٣} & \frac{١}{٤} \\ \frac{١}{٣} & \frac{١}{٢} & \frac{١}{٥} \end{vmatrix}$

، $= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٦ & ٤ & ٣ \\ ١٠ & ١٥ & ٦ \end{vmatrix} = (-٢١ ، -٦ ، ٥٠)$

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{\text{ر}}$. (-٢١ ، -٦ ، ٥٠) = ٠

«المستوى يمر بنقطة الأصل»

٢٣

∵ $\overrightarrow{\text{ه}_١}$ = (٤ ، ١ ، ٣) ، $\overrightarrow{\text{ه}_٢}$ = (٨ ، ٢ ، ٦)

∵ $\frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٦}$

∴ المستقيمان متوازيان أو منطبقان

، ∵ النقطة أ (١ ، -٢ ، ٢) ∈ $\text{ل}_١$

وبالتعويض بها فى $\text{ل}_٢$ نجد أن أ ∉ $\text{ل}_٢$

∴ المستقيمان متوازيان وغير منطبقين

∴ يمكن أن يجمعهما مستوى واحد

وبفرض أ (١ ، -٢ ، ٢) ∈ $\text{ل}_١$ ، ب (٣ ، ٤ ، -٥) ∈ $\text{ل}_٢$

∴ $\overrightarrow{\text{أب}} = \overrightarrow{\text{ب}} - \overrightarrow{\text{أ}}$ = (٢ ، ٦ ، -٧)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \overrightarrow{\text{أب}} \times \overrightarrow{\text{ه}_٢}$

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٢ & ٦ & -٧ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$

$= ٢٥ \overrightarrow{\text{س}} - ٣٤ \overrightarrow{\text{ص}} - ٢٢ \overrightarrow{\text{ع}}$

∴ معادلة المستوى هى (٢٥ ، -٣٤ ، -٢٢) . $\overrightarrow{\text{ر}}$

= (٢٥ ، -٣٤ ، -٢٢) . (١ ، -٢ ، ٢)

∴ ٢٥ س - ٣٤ ص - ٢٢ ع = ٤٩

٢٤

متجه الاتجاه العمودى على المستوى

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٦ & -٢ & -١ \\ ١ & -٣ & ٣ \end{vmatrix} = (-٩ ، -١٩ ، -١٦)$

، ∵ المستوى يحوى المستقيم

$\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، ٣ ، -٥) + $\text{ل}_١$ (٦ ، -٢ ، -١)

∴ المستوى يحوى النقطة (٠ ، ٣ ، -٥)

∴ المعادلة المطلوبة هى :

$\overrightarrow{\text{ر}}$. (-٩ ، -١٩ ، -١٦) = (٠ ، ٣ ، -٥) . (-٩ ، -١٩ ، -١٦)

∴ -٩ س - ١٩ ص - ١٦ ع - ٢٣ = ٠

٢٥

∵ النقطة (-١ ، ٣ ، -٢) تقع على المستقيم

∴ (-١ ، ٣ ، -٢) ∈ للمستوى المطلوب

∴ المتجه (-١ ، ٣ ، -٢) - (٠ ، ٧ ، -٧)

= (-١ ، -٤ ، ٥)

يقع فى المستوى

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -١ & -٤ & ٥ \\ -٣ & ٢ & ١ \end{vmatrix} = (-١٤ ، -١٤ ، -١٤)$

∴ المتجه (١ ، ١ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{\text{ر}}$. (١ ، ١ ، ١) = (٠ ، ٧ ، -٧) . (١ ، ١ ، ١)

∴ س + ص + ع = ٠

٢٦

المتجه (١ ، ٢ ، ٣) يقع فى المستوى المطلوب

، المتجه (٢ ، ٧ ، -٣) يوازى المستوى المطلوب

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٧ & -٣ \end{vmatrix} = (-٢٧ ، ٩ ، ٣)$

∴ (-٩ ، ٣ ، ١) متجه اتجاه عمودى للمستوى

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{\text{ر}}$. (-٩ ، ٣ ، ١) = (٠ ، ٣ ، ٥) . (-٩ ، ٣ ، ١)

∴ -٩ س + ٣ ص + ع - ١٤ = ٠

٢٧

متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = (-٧ ، ٨ ، -٣)$

∴ معادلة المستوى المطلوبة هى :

$\bar{\text{ر}}$. (−٧ ، ٨ ، −٣) = (−١ ، ٣ ، ٢) . (−٧ ، ٨ ، −٣)

∴ −٧ س + ٨ ص − ٣ ع − ٢٥ = ٠

٢٨

متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$$= \begin{vmatrix} \bar{\text{س}} & \bar{\text{ص}} & \bar{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ & ١ \end{vmatrix} = (-٢ ، -٤ ، -١٠)$$

، ∵ المستوى يحوى نقطة الأصل

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

−٢ س − ٤ ص − ١٠ ع = ٠

∴ س + ٢ ص + ٥ ع = ٠

٢٩

① ∵ المستوى المطلوب يوازى المستوى

٢ س + ٣ ص + ٥ ع = ١

∴ متجه الاتجاه العمودى للمستويين واحد.

∴ (٢ ، ٣ ، ٥) متجه اتجاه المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\bar{\text{ر}}$. (٢ ، ٣ ، ٥) = (٢ ، ١ ، ٤) . (٢ ، ٣ ، ٥)

∴ ٢ س + ٣ ص + ٥ ع − ٢٧ = ٠

② ∵ المستوى عمودى على المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ٢ ، ٥) ، (١ ، ٦ ، ٤)

∴ المتجه (٣ ، ٢ ، ٥) − (١ ، ٦ ، ٤) = (٢ ، −٤ ، ١) متجه اتجاه عمودى للمستوى

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\bar{\text{ر}}$. (٢ ، −٤ ، ١) = (٢ ، ١ ، ٤) . (٢ ، −٤ ، ١)

∴ ٢ س − ٤ ص + ع − ٤ = ٠

③ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$$= \begin{vmatrix} \bar{\text{س}} & \bar{\text{ص}} & \bar{\text{ع}} \\ ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ & -٦ \end{vmatrix} = (-١٦ ، ٤٨ ، ٣٢)$$

∴ المتجه (−١ ، ٣ ، ٢) متجه عمودى للمستوى

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\bar{\text{ر}}$. (−١ ، ٣ ، ٢) = (٢ ، ١ ، ٤) . (−١ ، ٣ ، ٢)

∴ − س + ٣ ص + ٢ ع − ٩ = ٠

٣٠

∵ ع = ٢ + ٣ $ك_١$ ∴ $ك_١ = \frac{\text{ع} - ٢}{٣}$

، ∵ ص = ٤ − $ك_٢$ ∴ $ك_٢$ = ٤ − ص

∴ س = ٢ + ٢ × $\frac{\text{ع} - ٢}{٣}$ − ٤ (٤ − ص)

∴ ٣ س = ٦ + ٢ ع − ٤ − ٤٨ + ١٢ ص

∴ ٣ س − ٢ ع − ١٢ ص + ٤٦ = ٠

٣١

س = ٢ − $ك_١$ + ٦ $ك_٢$ (١)

ص = ٣ + ٣ $ك_١$ + $ك_٢$ (٢)

ع = ٥ + ٤ $ك_١$ − ٢ $ك_٢$ (٣)

بضرب المعادلة (١) × ٣ والجمع إلى المعادلة (٢)

∴ ٣ س + ص = ٩ + ١٩ $ك_٢$

∴ $ك_٢ = \frac{٣\text{س} + \text{ص} - ٩}{١٩}$ (٤)

، بضرب المعادلة (٢) فى −٦ والجمع إلى المعادلة (١)

∴ س − ٦ ص = −١٦ − ١٩ $ك_١$

∴ $ك_١ = \frac{-(\text{س} - ٦\text{ص} + ١٦)}{١٩}$ (٥)

بالتعويض من (٤) ، (٥) فى (٣)

∴ $\text{ع} = ٥ + \frac{-٤\text{س} + ٢٤\text{ص} - ٦٤}{١٩}$

$+ \frac{-٦\text{س} - ٢\text{ص} + ١٨}{١٩}$

∴ ١٩ ع = ٩٥ − ٤ س + ٢٤ ص − ٦٤

− ٦ س − ٢ ص + ١٨

∴ ١٠ س − ٢٢ ص + ١٩ ع − ٤٩ = ٠

٣٢

∵ (٥ ، ٥ ، ٧) متجه اتجاه المستقيم

، (٣ ، ٤ ، −٥) متجه اتجاه عمودى على المستوى

، ∵ (٥ ، ٥ ، ٧) . (٣ ، ٤ ، −٥) = ١٥ + ٢٠ − ٣٥ = ٠

∴ المستقيم يوازى المستوى

، ∵ (٣ ، −١ ، −٤) تقع على المستقيم وبالتعويض بها فى معادلة المستوى

∴ ٣ (٣) + ٤ (−١) − ع (−٤) = ٢٥ «تحقق المعادلة»

∴ المستقيم يقع فى المستوى.

٣٣

بالتعويض بالنقطة أ (٢ ، ٣ ، ١) فى معادلة المستوى

∴ (٢ ، ٣ ، ١) . (٢ ، ٠ ، −١) = ٤ − ١ = ٣ (تحقق)

∴ أ (٢ ، ٣ ، ١) تقع فى المستوى

، ∵ (١ ، −٢ ، ٢) متجه اتجاه المستقيم، (٢ ، ٠ ، −١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

، ∵ (١ ، −٢ ، ٢) . (٢ ، ٠ ، −١) = صفر

∴ المستقيم يوازى المستوى

، ∵ (٣ ، ١ ، ٣) ∋ للمستقيم وبالتعويض بها فى معادلة المستوى

∴ (٣ ، ١ ، ٣) . (٢ ، ٠ ، −١) = ٦ − ٣ = ٣ (تحقق)

∴ المستقيم يقع فى المستوى.

٣٤

∵ المتجه (٢ ، ٣ ، ٤) هو متجه اتجاه للمستقيم

، ∵ المتجه (١ ، $\frac{٣}{٢}$ ، ٢) هو متجه اتجاه عمودى على المستوى

، ∵ $\frac{٢}{١} = \frac{٣}{\frac{٣}{٢}} = \frac{٤}{٢}$ ∴ المتجهان متوازيان

∴ المستقيم عمودى على المستوى.

٣٥

∵ (١ ، −١ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم

، (٢ ، −١ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

، بفرض أن θ قياس الزاوية بينهما

∴ $\text{جتا}\ \theta = \frac{|(١ ، -١ ، ١) . (٢ ، -١ ، ١)|}{\sqrt{١ + ١ + ١}\sqrt{٤ + ١ + ١}} = \frac{٢\sqrt{٢}}{٣}$

∴ θ ≃ ١٩° ٢٨َ

٣٦

∵ (٣ ، ٢ ، ٤) متجه اتجاه للمستقيم

، (٢ ، ١ ، −٣) متجه اتجاه عمودى على المستوى

∴ $\text{جتا}\ \theta = \frac{|(٣ ، ٢ ، ٤) . (٢ ، ١ ، -٣)|}{\sqrt{٩ + ٤ + ١٦}\sqrt{٤ + ١ + ٩}} = \frac{٤}{\sqrt{٢٩}\sqrt{١٤}}$

∴ ق (د θ) ≃ ٧٨° ٤٣َ

وهى الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودى على المستوى

∴ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى

= ٩٠° − ٧٨° ٤٣َ = ١١° ٢٧َ

٣٧

∵ (٢ ، −١ ، ٣) متجه اتجاه للمستقيم

، (٣ ، ٢ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

∴ $\text{جتا}\ \theta = \frac{|(٢ ، -١ ، ٣) . (٣ ، ٢ ، ١)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٩} \times \sqrt{٩ + ٤ + ١}} = \frac{١}{٢}$

∴ θ = ٦٠° وهى الزاوية بين متجه اتجاه المستقيم والمتجه العمودى على المستوى

∴ قياس الزاوية الصغرى بين المستقيم والمستوى

= ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

٣٨

∵ $\text{جتا}\ \theta = \frac{|(٢ ، ١ ، -٢) . (\text{م} ، ١ ، ٠)|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤}\sqrt{\text{م}^٢ + ١}}$

حيث θ = ٩٠° − ٤٥° = ٤٥°

، ∵ جتا ٤٥° = $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ ∴ $\frac{١}{\sqrt{٢}} = \frac{|٢\text{م} + ١|}{٣\sqrt{\text{م}^٢ + ١}}$

∴ $\sqrt{٢}\,|٢\text{م} + ١| = ٣\sqrt{\text{م}^٢ + ١}$ بتربيع الطرفين

∴ ٢ (٢ م + ١)^٢ = ٩ (م^٢ + ١)

∴ ٨ م^٢ + ٨ م + ٢ = ٩ م^٢ + ٩

∴ م^٢ − ٨ م + ٧ = ٠

∴ (م − ١) (م − ٧) = ٠

∴ م = ١ ، أ، م = ٧

∴ ٢ س − ٤ ص + ع − ٤ = ٠

(٢) متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

$$\begin{vmatrix} \overline{س} & \overline{ص} & \overline{ع} \\ ٧ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ & -٦ \end{vmatrix} = (-١٦ ، ٤٨ ، ٣٢)$$

، بضرب المعادلة (٣) فى −٦ والجمع إلى المعادلة (١)

∴ ع = (−س − ٦ ص + ١٦) / ١٩ (٥)

بالتعويض من (١) ، (٥) فى (٣)

∴ ١٩ ع = ٩٥ − ٤ س + ٢٤ ص − ٦٤
− ٦ س − ٢ ص + ١٨

∴ ١٠ س − ٢٢ ص + ١٩ ع − ٤٩ = ٠

٣٢

∵ (٥ ، ٥ ، ٧) متجه اتجاه المستقيم

، (٣ ، ٤ ، −٥) متجه اتجاه عمودى على المستوى

٢٤

∵ المتجه (٢ ، ٢ ، ١) هو متجه اتجاه المستقيم

، ∵ المتجه (١ ، ٣/٢ ، ٢) هو متجه اتجاه عمودى على المستوى

، ∵ ٢/١ = ٢/(٣/٢) = ١/٢ ∴ المتجهان متوازيان

∴ المستقيم عمودى على المستوى.

٢٥

∵ (١ ، −١ ، ١) متجه اتجاه للمستقيم

، (٢ ، −١ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

، بفرض ان θ قياس الزاوية بينهما

∴ جتا θ = |(١ ، −١ ، ١) . (٢ ، −١ ، ١)| / (√(١ + ١ + ١) √(٤ + ١ + ١)) = ٢√٢ / ٣

∴ θ = ١٩° ٢٨َ

∴ قياس الزاوية ...

= ٩٠° − ٦٠° = ٣٠°

٢٨

∵ جا θ = |(٢ ، ١ ، −٢) . (م ، ١ ، ٠)| / (√(٤ + ١ + ١) √(م² + ١))

حيث θ = ٩٠° − ٤٥° = ٤٥°

، ∵ جا ٤٥° = ١/√٢ ∴ ١/√٢ = |٢ م + ١| / (٣ √(م² + ١))

∴ √٢ |٢ م + ١| = ٣ √(م² + ١) بتربيع الطرفين

∴ ٢ (٢ م + ١)² = ٩ (م² + ١)

∴ ٨ م² + ٨ م + ٢ = ٩ م² + ٩

∴ م² − ٨ م + ٧ = ٠

∴ (م − ١) (م − ٧) = ٠

∴ م = ١ أو م = ٧

٣٩

∵ θ هى الزاوية الصغرى المحصورة بين المستقيم والمستوى حيث $\overline{ه_١}$ (متجه اتجاه المستقيم)

= (ك ، −٢ ، ١) ، $\overline{ه_٢}$ (متجه اتجاه عمودى على المستوى)

= (١ ، ٢ ، ٣)

∴ (٩٠° − θ) هى الزاوية بين $\overline{ه_١}$ ، $\overline{ه_٢}$

∴ جتا (٩٠ − θ) = |(ك ، −٢ ، ١) . (١ ، ٢ ، ٣)| / (√(ك² + ٤ + ١) √(١ + ٤ + ٩))

∴ جا θ = |ك − ٤ + ٣| / (√(ك² + ٥) √١٤)

∴ √١٤ / ٤٢ = |ك − ١| / (√(ك² + ٥) √١٤)

∴ ٤٢ |ك − ١| = ١٤ √(ك² + ٥)

∴ ٣ |ك − ١| = √(ك² + ٥)

∴ ٩ (ك − ١)² = ك² + ٥

∴ ٨ ك² − ١٨ ك + ٤ = ٠

∴ ٤ ك² − ٩ ك + ٢ = ٠

∴ (٤ ك − ١) (ك − ٢) = ٠

∴ ك = ١/٤ أ ، ك = ٢

٤٠

بفرض س = ص = ع = ك

وبالتعويض فى معادلة المستوى

∴ ك + ٢ ك + ٣ ك = ١٢

∴ ٦ ك = ١٢ ∴ ك = ٢

∴ النقطة هى (٢ ، ٢ ، ٢)

٤١

من معادلة المستقيم وبفرض أن

(س + ٨)/٩ = (ص − ١٠)/(−٤) = (ع − ٩)/(−٢) = ك

∴ س = ٩ ك − ٨ ، ص = −٤ ك + ١٠

، ع = −٢ ك + ٩

وبالتعويض فى معادلة المستوى

∴ ٣ (٩ ك − ٨) + ٤ (−٤ ك + ١٠)
+ ٥ (−٢ ك + ٩) = ٧٦

∴ ٢٧ ك − ٢٤ − ١٦ ك + ٤٠ − ١٠ ك + ٤٥ = ٧٦

∴ ك = ١٥

نقطة التقاطع هى :

(٩ × ١٥ − ٨ ، −٤ × ١٥ + ١٠ ، −٢ × ١٥ + ٩)

= (١٢٧ ، −٥٠ ، −٢١)

٤٢

بالتعويض عن $\overline{ر}$ من معادلة المستقيم فى معادلة المستوى

∴ (٢ + ٣ ك ، −١ + ٤ ك ، ٢ + ٢ ك)
. (١ ، −١ ، ١) = ٥

∴ ٢ + ٣ ك + ١ − ٤ ك + ٢ + ٢ ك = ٥

∴ ك = ٠

∴ نقطة التقاطع هى : (٢ ، −١ ، ٢)

٤٣

معادلة المستقيم $\overline{ر}$ = (٠ ، ٠ ، ١) + ك (٢ ، ١ ، ١)

، معادلة المستوى $\overline{ر}$. (١ ، ٠ ، ٠) = ٤

وبالتعويض من معادلة المستقيم فى معادلة المستوى

∴ (٢ ك ، ك ، ١ + ك) . (١ ، ٠ ، ٠) = ٤

∴ ٢ ك = ٤ ∴ ك = ٢

∴ نقطة التقاطع هى : (٤ ، ٢ ، ٣)

٤٤

بفرض النقطة أ (س١ ، ص١ ، ع١) هى مسقط النقطة ب (١ ، ٢ ، ٣) على المستوى المعطى

∴ $\overline{أب}$ = (١ − س١ ، ٢ − ص١ ، ٣ − ع١)

عموديًا على المستوى

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{ن}$

∴ (١ − س١ ، ٢ − ص١ ، ٣ − ع١) = ك (١ ، ٢ ، ٤)

∴ ١ − س١ = ك ∴ س١ = ١ − ك

، ٢ − ص١ = ٢ ك ∴ ص١ = ٢ − ٢ ك

، ٣ − ع١ = ٤ ك ∴ ع١ = ٣ − ٤ ك

، ∵ أ (س١ ، ص١ ، ع١) تقع على المستوى

∴ تحقق معادلته

∴ ١ − ك + ٢ (٢ − ٢ ك) + ٤ (٣ − ٤ ك) = ٥٩

∴ ١ − ك + ٤ − ٤ ك + ١٢ − ١٦ ك = ٥٩

∴ ١٧ − ٢١ ك = ٥٩ ∴ ك = −٢

∴ س١ = ٣ ، ص١ = ٦ ∴ ع١ = ١١

∴ أ (٣ ، ٦ ، ١١) هى مسقط ب (١ ، ٢ ، ٣) على المستوى المعطى

٤٥

أقرب نقطة على المستوى من ب هى مسقط ب على المستوى وبفرض أن أ (س١ ، ص١ ، ع١) هى مسقط النقطة ب (١ ، ٠ ، −١) على المستوى المعطى

∴ $\overline{أب}$ = (١ − س١ ، − ص١ ، −١ − ع١) عموديًا على المستوى

∴ $\overline{أب}$ // $\overline{ن}$

∴ (١ − س١ ، − ص١ ، −١ − ع١) = ك (٢ ، ١ ، −٢)

∴ ١ − س١ = ٢ ك ، − ص١ = ك

، −١ − ع١ = −٢ ك

∴ النقطة أ (١ − ٢ ك ، − ك ، −١ + ٢ ك)

، ∵ أ تقع على المستوى ∴ تحقق معادلته

∴ ٢ (١ − ٢ ك) + (− ك) − ٢ (−١ + ٢ ك) = ١

∴ ك = ١/٣ ∴ النقطة هى (١/٣ ، −١/٣ ، −١/٣)

٤٦

∵ (١ ، −٣ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

∴ معادلة المستقيم المار بالنقطة أ (٣ ، −٨ ، −٧) عموديًا على المستوى هى

$\overline{ر}$ = (٣ ، −٨ ، −٧) + ك (١ ، −٣ ، ١)

∴ أَ صورة أ بالإنعكاس فى المستوى ∈ المستقيم

∴ أَ = (٣ + ك ، −٨ − ٣ ك ، −٧ + ك)

∴ منتصف $\overline{أأَ}$

= ((٣ + ٣ + ك)/٢ ، (−٨ − ٨ − ٣ ك)/٢ ، (−٧ − ٧ + ك)/٢)

∈ المستوى

أى (٣ + ك/٢ ، −٨ − ٣/٢ ك ، −٧ + ١/٢ ك) ∈ المستوى

∴ (٣ + ١/٢ ك) − ٣ (−٨ − ٣/٢ ك)
+ (−٧ + ١/٢ ك) + ٢ = ٠

∴ ٣ + ١/٢ ك + ٢٤ + ٤ ١/٢ ك − ٧ + ١/٢ ك + ٢ = ٠

∴ ك = −٤ ∴ أَ = (−١ ، ٤ ، −١١)

٤٧

متجه اتجاه المستقيم = (١ ، −١ ، −٦)

∴ معادلة المستقيم :

$\overline{ر}$ = (٢ ، −٣ ، ١) + ك (١ ، −١ ، −٦)

، معادلة المستوى هى

$$\begin{vmatrix} س - ٢ & ص - ٢ & ع - ١ \\ ٣ - ٢ & ٠ - ٢ & ١ - ١ \\ ٤ - ٢ & -١ - ٢ & ٠ - ١ \end{vmatrix} = صفر$$

أى أن

$$\begin{vmatrix} س - ٢ & ص - ٢ & ع - ١ \\ ١ & -٢ & ٠ \\ ٢ & -٣ & -١ \end{vmatrix} = صفر$$

∴ ٢ (س − ٢) + (ص − ٢) + (ع − ١) = صفر

∴ ٢ س + ص + ع − ٧ = صفر

، من معادلة المستقيم

∴ س = ٢ + ك ، ص = −٣ − ك ، ع = ١ − ٦ ك

وبالتعويض فى معادلة المستوى

∴ ٤ + ٢ ك − ٣ − ك + ١ − ٦ ك − ٧ = صفر

∴ − ٥ ك = ٥ ∴ ك = −١

∴ نقطة التقاطع هى : (١ ، −٢ ، ٧)

٤٨

∵ $\vec{ر}$ = (١ ، ٢ ، −١) + ك (٠ ، −١ ، ٢)

∴ س = ١ ، ص = ٢ − ك ، ع = −١ + ٢ ك

ونعوض فى معادلة المستوى لايجاد نقطة التقاطع

∴ ٢ (١) − (٢ − ك) + (−١ + ٢ ك) = ٥

∴ ك = ٢

∴ نقطة التقاطع هى (١ ، ٠ ، ٣)

، ∵ النقطة أ (١ ، ٢ ، −١) تقع على المستقيم

ولنفرض أن مسقطها هى النقطة ب ($س_١$ ، $ص_١$ ، $ع_١$)

∴ $\overrightarrow{أب}$ = ب − أ = ($س_١$ − ١ ، $ص_١$ − ٢ ، $ع_١$ + ١)

∴ $\overrightarrow{أب}$ يوازى المتجه $\vec{ن}$ = (٢ ، −١ ، ١)

∴ $\frac{س_١ - ١}{٢} = \frac{ص_١ - ٢}{-١} = \frac{ع_١ + ١}{١}$ = ك

∴ $س_١$ = ٢ ك + ١ ، $ص_١$ = − ك + ٢

، $ع_١$ = ك − ١ ، ∵ النقطة ب ∈ المستوى

∴ ٢ (٢ ك + ١) − (− ك + ٢) + (ك − ١) = ٥

∴ ك = ١ ∴ النقطة هى (٣ ، ١ ، ٠)

∴ النقطتان (١ ، ٠ ، ٣) ، (٣ ، ١ ، ٠)

تنتميان إلى المسقط

∴ متجه اتجاه المسقط ($\vec{ى}$) = (٢ ، ١ ، −٣)

∴ معادلة المسقط هى

$\vec{ر}$ = (١ ، ٠ ، ٣) + ك (٢ ، ١ ، −٣)

أى أن $\frac{س - ١}{٢} = \frac{ص}{١} = \frac{ع - ٣}{-٣}$

٤٩

لإيجاد نقطة تقاطع المستويات الثلاثة نقوم بحل المعادلات الثلاثة معًا بطريقة كرامر

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ٣ & -١ & -١ \end{vmatrix}$$

= ٢ × صفر − ١ × −٤ − ١ × −٤ = ٨

$$، \Delta_{س} = \begin{vmatrix} -١ & ١ & -١ \\ ٢ & ١ & ١ \\ ٦ & -١ & -١ \end{vmatrix}$$

= −١ × صفر − ١ × −٨ − ١ × −٨ = ١٦

$$، \Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٢ & -١ & -١ \\ ١ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٦ & -١ \end{vmatrix}$$

= ٢ × −٨ + ١ × −٤ − ١ × ٠ = −٢٠

$$، \Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٢ & ١ & -١ \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٣ & -١ & ٦ \end{vmatrix}$$

= ٢ × ٨ − ١ × صفر − ١ × −٤ = ٢٠

∴ س = $\frac{١٦}{٨}$ = ٢ ، ص = $\frac{-٢٠}{٨} = \frac{-٥}{٢}$

، ع = $\frac{٢٠}{٨} = \frac{٥}{٢}$

∴ نقطة تقاطع المستويات الثلاثة هى : (٢ ، $\frac{-٥}{٢}$ ، $\frac{٥}{٢}$)

حلول تمارين 7

١

(١) $\vec{ن}_١$ = (٤ ، ٤ ، −٢) ، $\vec{ن}_٢$ = (٢ ، ١ ، ١)

∴ جتا θ = $\frac{|٨ + ٤ - ٢|}{\sqrt{١٦ + ١٦ + ٤} \times \sqrt{٤ + ١ + ١}} = \frac{٥\sqrt{٦}}{١٨}$

(٢) $\vec{ن}_١$ = (٢ ، −١ ، ٤) ، $\vec{ن}_٢$ = (٣ ، −١ ، ٢)

∴ جتا θ = $\frac{|٦ + ١ + ٨|}{\sqrt{٤ + ١ + ١٦} \times \sqrt{٩ + ١ + ٤}} = \frac{٥\sqrt{٦}}{١٤}$

(٣) $\vec{ن}_١$ = (٢ ، −١ ، ٢) ، $\vec{ن}_٢$ = (٣ ، ٢ ، −٦)

∴ جتا θ = $\frac{|٦ - ٢ - ١٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ٤} \times \sqrt{٩ + ٤ + ٣٦}} = \frac{٨}{٢١}$

٢

(١) $\vec{ن}_١$ = (٢ ، −١ ، ١) ، $\vec{ن}_٢$ = (٣ ، ٢ ، −٢)

∴ جتا θ = $\frac{|٦ - ٢ - ٢|}{\sqrt{٤ + ١ + ١} \times \sqrt{٩ + ٤ + ٤}} = \frac{\sqrt{١٠٢}}{٥١}$

∴ θ ≃ ٧٨° ٣٤َ ٤٢ً

(٢) $\vec{ن}_١$ = (٢ ، ١ ، −١) ، $\vec{ن}_٢$ = (٣ ، −٢ ، ٠)

∴ جتا θ = $\frac{|٦ - ٢ + ٠|}{\sqrt{٤ + ١ + ١} \times \sqrt{٩ + ٤ + ٠}} = \frac{٢\sqrt{٧٨}}{٣٩}$

∴ θ ≃ ٦٣° ٤َ ١٠ً

(٣) $\vec{ن}_١$ = (٠ ، ١ ، ٠) ، $\vec{ن}_٢$ = (١ ، −٣ ، ٥)

∴ جتا θ = $\frac{|٠ - ٣ + ٠|}{\sqrt{٠ + ١ + ٠} \times \sqrt{١ + ٩ + ٢٥}} = \frac{٣\sqrt{٣٥}}{٣٥}$

∴ θ ≃ ٥٩° ٤١َ ٤٧ً

(٤) $\vec{ن}_١$ = (١ ، ٣ ، −٤) ، $\vec{ن}_٢$ = (٢ ، ٢ ، ٢)

∴ جتا θ = $\frac{|٢ + ٦ - ٨|}{\sqrt{١ + ٩ + ١٦} \times \sqrt{٤ + ٤ + ٤}}$ = صفر

∴ θ = ٩٠°

(٥) $\vec{ن}_١$ = (٣ ، −١ ، ٠) ، $\vec{ن}_٢$ = (١ ، −٢ ، ٠)

∴ جتا θ = $\frac{|٣ + ٢ + ٠|}{\sqrt{٩ + ١} \times \sqrt{١ + ٤}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

∴ θ = ٤٥°

(٦) $\vec{ن}_١$ = (١ ، −٣ ، ٢) ، $\vec{ن}_٢$ = (٢ ، ١ ، −١)

∴ جتا θ = $\frac{|٢ - ٣ - ٢|}{\sqrt{١ + ٩ + ٤} \times \sqrt{٤ + ١ + ١}} = \frac{\sqrt{٢١}}{١٤}$

∴ θ ≃ ٧٠° ٥٢َ ٣٦ً

٣

(١) ∵ المستويين متوازيان

∴ $\frac{٢}{١} = \frac{-١}{ل} = \frac{ك}{٤}$ ∴ ل = $\frac{-١}{٢}$ ، ك = ٨

(٢) ∵ المستويين متوازيان

∴ $\frac{٦}{٣} = \frac{}{-ك} = \frac{ل}{٥}$ ∴ ك = ٠ ، ل = ١٠

(٣) ∵ المستويين متوازيان

∴ $\frac{-٢}{٥} = \frac{ك}{٤} = \frac{٥ ل}{٢٠}$ ∴ ل = ك = −١,٦

٤

(١) ∵ المستويين متعامدان

∴ (٣ ، −٤ ، ٢) . (٣ ، ٤ ، −أ) = ٠

∴ ٩ − ١٦ − ٢ أ = ٠ ∴ أ = −٣,٥

(٢) ∵ المستويين متعامدان

∴ (١ ، −٣ ، ١) . (أ ، ٢ ، ٣) = ٠

∴ أ − ٦ + ٣ = ٠ ∴ أ = ٣

(٣) ∵ المستويين متعامدان

∴ (٣ ، −٥ ، أ) . (١ ، ٣ ، ٢) = ٠

∴ ٣ − ١٥ + ٢ أ = ٠ ∴ أ = ٦

(٤) ∵ المستويين متعامدان

∴ (٧ ، −٢ ، ٠) . (أ ، ١ ، −٣) = ٠

∴ ٧ أ − ٢ = ٠ ∴ أ = $\frac{٢}{٧}$

٥

∵ $\frac{٢}{٣} \neq \frac{٣}{-٦}$

∴ المستويان متقاطعين

، ∵ (٢ ، ٣ ، ٤) . (٣ ، −٦ ، ٠) = ٦ − ١٨ + ٠

= −١٢ ≠ صفر

∴ المستويان متقاطعان وغير متعامدين.

٦

(١) (جـ)	(٢) (ب)	(٣) (جـ)	(٤) (جـ)
(٥) (د)	(٦) (جـ)	(٧) (ب)	(٨) (أ)
(٩) (د)	(١٠) (جـ)	(١١) (د)	(١٢) (ب)
(١٣) (ب)	(١٤) (د)	(١٥) (جـ)	(١٦) (ب)

(١٧) (ب) (١٨) (جـ) (١٩) (أ) (٢٠) (ب)
(٢١) (جـ) (٢٢) (د) (٢٣) (د) (٢٤) (ب)
(٢٥) (جـ) (٢٦) (جـ) (٢٧) (د) (٢٨) (جـ)

٧

(١) معادلتا المستويين هما :

٣ س − ص + ٢ ع = ٣ (١)

، س − ٢ ص + ٥ ع = ٢ (٢)

∵ $\frac{٣}{١} \neq \frac{-١}{-٢}$ ∴ المستويان متقاطعان

، بضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)

∴ −٥ س + ع = −٤

∴ ع = −٤ + ٥ س (٣)

وبضرب المعادلة (٢) × −٣ والجمع إلى (١)

∴ ٥ ص − ١٣ ع = −٣

∴ ع = $\frac{\text{٥ ص} + ٣}{١٣}$ (٤)

من (٣) ، (٤)

∴ الصورة الإحداثية لمعادلة خط التقاطع هى :

−٤ + ٥ س = $\frac{\text{٥ ص} + ٣}{١٣}$ = ع

(٢) معادلتا المستويين هما :

س + ٢ ص − ٢ ع = ١ (١)

، ٢ س + ص − ٣ ع = ٥ (٢)

بضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)

∴ −٣ ص + ع = ٣ وبوضع ص = ك

∴ ع = ٣ + ٣ ك وبالتعويض فى (١)

∴ س + ٢ ك − ٢ (٣ + ٣ ك) = ١

∴ س = ٧ + ٤ ك

∴ المعادلات البارامترية لخط التقاطع هى :

س = ٧ + ٤ ك ، ص = ك ، ع = ٣ + ٣ ك

(٣) معادلتا المستويين هما :

$\overrightarrow{\text{ر}} \cdot (٣\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ص}} + \overrightarrow{\text{ع}}) = ١$ (١)

، $\overrightarrow{\text{ر}} \cdot (\overrightarrow{\text{س}} + ٤\overrightarrow{\text{ص}} - ٢\overrightarrow{\text{ع}}) = ٢$ (٢)

∴ متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٣ & -١ & ١ \\ ١ & ٤ & -٢ \end{vmatrix}$

= (−٢ ، ٧ ، ١٣)

، بوضع س = ٠ فى معادلتى المستويين

∴ (٠ ، ص ، ع) . (٣ ، −١ ، ١) = ١

∴ − ص + ع = ١ (٣)

، (٠ ، ص ، ع) . (١ ، ٤ ، −٢) = ٢

∴ ٤ ص − ٢ ع = ٢

∴ ٢ ص − ع = ١ (٤)

وبجمع (٣) ، (٤) :

∴ ص = ٢ وبالتعويض فى (٣) ع = ٣

∴ النقطة (٠ ، ٢ ، ٣) تقع على خط التقاطع

∴ الصورة الاتجاهية لمعادلة خط التقاطع هى :

$\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، ٢ ، ٣) + ك (−٢ ، ٧ ، ١٣)

٨

متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ٠ & ١ \end{vmatrix}$

= $\overrightarrow{\text{س}} - \overrightarrow{\text{ع}}$ = (١ ، ٠ ، −١)

وبوضع س = ٠ فى المعادلتين

∴ ع = ٠ ، ص = ١

∴ خط التقاطع يمر بالنقطة (٠ ، ١ ، ٠)

∴ معادلة خط التقاطع هى

$\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٠ ، ١ ، ٠) + ك (١ ، ٠ ، −١)

(الصورة المتجهة)

∴ س = ك ، ص = ١ ، ع = −ك

(الصورة البارامترية)

، $\frac{\text{س}}{١} = \frac{\text{ع}}{-١}$ ، ص = ١

أى أن س + ع = ٠ ، ص = ١ (الصورة الكارتيزية)

٩

معادلتا المستويين هما :

٣ س − ص − ع = ٢ (١)

، س − ٢ ص + ٢ ع = ١ (٢)

، ∵ $\frac{٣}{١} \neq \frac{-١}{-٢}$

∴ المستويان متقاطعان

وبضرب المعادلة (١) × ٢ والجمع إلى (٢)

∴ ٧ س − ٤ ص = ٥

∴ س = $\frac{٥ + \text{٤ ص}}{٧}$ (٣)

وبضرب المعادلة (١) × −٢ والجمع إلى (٢)

∴ −٥ س + ٤ ع = −٣

∴ س = $\frac{\text{٤ ع} + ٣}{٥}$ (٤)

من (٣) ، (٤) :

∴ الصورة الإحداثية لمعادلة خط التقاطع هى :

س = $\frac{٥ + \text{٤ ص}}{٧} = \frac{\text{٤ ع} + ٣}{٥}$

١٠

متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ١ & -١ \\ ١ & -١ & -٥ \end{vmatrix}$

= (−٦ ، ٤ ، −٢)

، متجه اتجاه المستقيم المعطى = (٣ ، −٢ ، ١)

، ∵ $\frac{-٦}{٣} = \frac{٤}{-٢} = \frac{-٢}{١}$

∴ خط تقاطع المستويين يوازى المستقيم المعطى.

١١

متجه الاتجاه العمودى للمستوى المطلوب

= (١ ، ٢ ، −٣) × (٣ ، −١ ، ٢)

= $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ٢ & -٣ \\ ٣ & -١ & ٢ \end{vmatrix}$ = (١ ، −١١ ، −٧)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى

$\overrightarrow{\text{ر}}$. (١ ، −١١ ، −٧) = (١ ، ٢ ، −٥) . (١ ، −١١ ، −٧)

∴ س − ١١ ص − ٧ ع = ٣

١٢

المستوى يمر بالنقطتين أ (١ ، −١ ، ١) ، ب (−١ ، ١ ، ١)

∴ $\overrightarrow{\text{أب}}$ = (−٢ ، ٢ ، ٠) متجه يوازى المستوى

، ∴ (١ ، ٢ ، ٢) متجه الاتجاه العمودى للمستوى المعطى

∴ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = (−٢ ، ٢ ، ٠) × (١ ، ٢ ، ٢)

متجه الاتجاه العمودى للمستوى المطلوب

∴ $\overrightarrow{\text{ن}}$ = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٢ & ٢ & ٠ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix}$ = (٤ ، ٤ ، −٦)

∴ معادلة المستوى المطلوب هى

$\overrightarrow{\text{ر}}$. (٤ ، ٤ ، −٦) = (١ ، −١ ، ١) . (٤ ، ٤ ، −٦)

∴ ٤ س + ٤ ص − ٦ ع = −٦

∴ ٢ س + ٢ ص − ٣ ع + ٣ = ٠

١٣

متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ١ & ١ & ٢ \\ ٢ & ١ & -١ \end{vmatrix}$

= (−٣ ، ٥ ، −١)

، ∵ خط التقاطع يقع فى المستوى المطلوب

∴ المتجه (−٣ ، ٥ ، −١) يوازى المستوى المطلوب

، ∵ $\overrightarrow{\text{م م}'}$ = (٣ ، −٢ ، ٢) − (٢ ، ٥ ، −٣)

= (١ ، −٧ ، ٥) يوازى المستوى المطلوب

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى المطلوب

= $\begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ -٣ & ٥ & -١ \\ ١ & -٧ & ٥ \end{vmatrix}$ = (١٨ ، ١٤ ، ١٦)

، بوضع س = ٠ فى كل من معادلتى المستويين

∴ ص + ٢ ع = −١ ، ص − ع = −١

وبحل المعادلتين معًا ∴ ص = −١ ، ع = ٠

∴ النقطة (٠ ، -١ ، ٠) تقع على خط التقاطع

∴ النقطة (٠ ، -١ ، ٠) تقع على المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\overrightarrow{ن}$. (١٨ ، ١٤ ، ١٦) = (١٨ ، ١٤ ، ١٦) . (٠ ، -١ ، ٠)

∴ ١٨ س + ١٤ ص + ١٦ ع = -١٤

١٤

∵ المستوى ٣ س + ٢ ص + ع + ٦ = ٠

عموديًا على المستوى المطلوب.

∴ المتجه (٣ ، ٢ ، ١) يوازي المستوى المطلوب

، ∵ متجه اتجاه خط التقاطع = $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & -١ \end{vmatrix}$

= (-٥ ، ٧ ، -٣)

∴ المتجه (-٥ ، ٧ ، -٣) يوازي المستوى المطلوب أيضًا

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى المطلوب

= $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٣ & ٢ & ١ \\ -٥ & ٧ & -٣ \end{vmatrix}$ = (-١٣ ، ٤ ، ٣١)

، بوضع س = ٠ في معادلتي المستويين

∴ ٢ ص + ٣ ع = ٤ ، ص - ع = -٨

وبحل المعادلتين معًا ∴ ص = -٤ ، ع = ٤

∴ النقطة (٠ ، -٤ ، ٤) تقع على خط التقاطع

∴ النقطة (٠ ، -٤ ، ٤) تقع على المستوى المطلوب

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\overrightarrow{ن}$. (-١٣ ، ٤ ، ٣١) = (٠ ، -٤ ، ٤) . (-١٣ ، ٤ ، ٣١)

∴ -١٣ س + ٤ ص + ٣١ ع = ١٠٨

١٥

• معادلة خط تقاطع المستويين :

٦ س + ٤ ص + ٣ ع = -٥ (١)

، ٢ س + ص + ع = ٢ (٢)

بضرب المعادلة (٢) × -٣ والجمع إلى (١)

∴ ص = -١١ وبالتعويض في (١)

∴ ٦ س - ٤٤ + ٣ ع = -٥

∴ ٢ س = ١٣ - ع

∴ معادلة خط التقاطع هي :

٢ س = ١٣ - ع ، ص = -١١

∴ النقطة (٠ ، -١١ ، ١٣) تقع على خط التقاطع

، المتجه ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، -١) متجه اتجاه لخط التقاطع

∴ المتجه ($\frac{١}{٢}$ ، ٠ ، -١) يوازي المستوى المطلوب

، ∵ المتجه (٠ ، -١١ ، ١٣) - (٢ ، -٣ ، ٢)

= (-٢ ، -٨ ، ١١) يقع في المستوى المطلوب

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى المطلوب

= $\begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ \frac{١}{٢} & ٠ & -١ \\ -٢ & -٨ & ١١ \end{vmatrix}$ = (-٨ ، $-\frac{٧}{٢}$ ، -٤)

∴ معادلة المستوى المطلوب هي :

$\overrightarrow{ن}$. (-٨ ، $-\frac{٧}{٢}$ ، -٤)

= (٢ ، -٣ ، ٢) . (-٨ ، $-\frac{٧}{٢}$ ، -٤)

∴ -٨ س - $\frac{٧}{٢}$ ص - ٤ ع = $\frac{-٢٧}{٢}$

∴ ١٦ س + ٧ ص + ٨ ع = ٢٧

١٦

البعد المطلوب = $\frac{|٨ (٣) - ٢ (-٥) + ٢ - ٥|}{\sqrt{٦٤ + ٤ + ١}}$

= $\frac{٣١}{\sqrt{٦٩}}$ وحدة طول.

١٧

معادلة المستوى هي :

٢ س + ٢ ص - ع - ٥ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢ (١) + ٢ (-١) - ٣ - ٥|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$

= $\frac{٨}{٣}$ وحدة طول.

١٨

معادلة المستوى هي :

س - ٢ ص + ٤ ع - ٩ = ٠

∴ طول العمود = $\frac{|٢ - ٢ (١) + ٤ (-١) - ٩|}{\sqrt{١ + ٤ + ١٦}}$

= $\frac{١٣}{\sqrt{٢١}}$ وحدة طول.

١٩

∴ $\frac{|\sqrt{٢} (٠) + (-١) - (٢) + ك|}{\sqrt{٢ + ١ + ١}}$ = ٢

∴ |ك - ٣| = ٤ ∴ ك - ٣ = ± ٤

∴ ك = ٧ أ، ك = -١

٢٠

طول العمود من مركز الكرة إلى المستوى = نق

∴ $\frac{|٢ (٢) + ٦ (-١) - ٣ (-٢) + ك|}{\sqrt{٤ + ٣٦ + ٩}}$ = ٣

∴ |٤ + ك| = ٢١

∴ ٤ + ك = ٢١ ∴ ك = ١٧

أ، ٤ + ك = -٢١ ∴ ك = -٢٥

٢١

نق للكرة = طول العمود المرسوم من مركزها إلى المستوى

∴ نق = $\frac{|١ + ٢ + ١ - ١|}{\sqrt{١ + ١ + ١}}$ = $\sqrt{٣}$ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هي :

$(س - ١)^٢ + (ص - ٢)^٢ + (ع - ١)^٢ = ٣$

٢٢

بفرض النقطة (أ ، ٠ ، ٠)

∴ $\frac{|١٢ أ + ١|}{\sqrt{١٤٤ + ٢٥٦ + ٢٢٥}}$ = $\frac{|٢ أ - ١|}{\sqrt{٤ + ٤ + ١}}$

∴ ٣ |١٢ أ + ١| = ٢٥ |٢ أ - ١|

∴ ٣ (١٢ أ + ١) = ± ٢٥ (٢ أ - ١)

∴ ٣ (١٢ أ + ١) = ٢٥ (٢ أ - ١)

∴ ٣٦ أ + ٣ = ٥٠ أ - ٢٥

∴ ١٤ أ = ٢٨ ∴ أ = ٢

أ، ٣ (١٢ أ + ١) = -٢٥ (٢ أ - ١)

∴ ٣٦ أ + ٣ = -٥٠ أ + ٢٥

∴ ٨٦ أ = ٢٢ ∴ أ = $\frac{١١}{٤٣}$

∴ النقطة هي (٢ ، ٠ ، ٠) أ، ($\frac{١١}{٤٣}$ ، ٠ ، ٠)

٢٣

∵ المستوى المطلوب يوازي المستوى

٢ س + ص - ٤ ع = ٠

∴ معادلته هي : ٢ س + ص - ٤ ع + د = ٠

، ∵ طول العمود من (١ ، ٢ ، ٠) عليه = $\sqrt{٢١}$

∴ $\frac{|٢ (١) + ٢ - ٤ (٠) + د|}{\sqrt{٤ + ١ + ١٦}}$ = $\sqrt{٢١}$

∴ |٤ + د| = ٢١ ∴ ٤ + د = ٢١

∴ د = ١٧ أ، ٤ + د = -٢١ ∴ د = -٢٥

∴ معادلة المستوى هي :

٢ س + ص - ٤ ع + ١٧ = ٠

أ، ٢ س + ص - ٤ ع - ٢٥ = ٠

٢٤

$\overrightarrow{م_١ م_٢}$ = (-٣ ، ٢ ، ٢)

، $\overrightarrow{م_١ م_٣}$ = (٦ ، -٦ ، -٥)

∴ متجه الاتجاه العمودي على المستوى

$$\overrightarrow{م_١ م_٢} \times \overrightarrow{م_١ م_٣} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ -٣ & ٢ & ٢ \\ ٦ & -٦ & -٥ \end{vmatrix} = (٢ ، -٣ ، ٦)$$

∴ معادلة المستوى المطلوب هى :

$\overrightarrow{ر}$. (٢ ، -٣ ، ٦) = (١ ، -١ ، ١) . (٢ ، -٣ ، ٦)

∴ ٢ س − ٣ ص + ٦ ع − ١١ = ٠

∴ طول العمود = $\dfrac{|٢(-١) - ٣(١) + ٦(-٢) - ١١|}{\sqrt{٤ + ٩ + ٣٦}}$

= ٤ وحدة طول.

٢٥

∴ $\dfrac{١}{٢} = \dfrac{-٢}{-٤} = \dfrac{٢}{٤} \neq \dfrac{-١}{-٣}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

∴ نوجد نقطة ∋ للمستوى الأول وذلك بفرض

س = ٠ ، ص = ٠

∴ ع = $\dfrac{١}{٢}$

∴ (٠ ، ٠ ، $\dfrac{١}{٢}$) ∋ للمستوى الأول

∴ المسافة بين المستويين

= $\dfrac{|٢(٠) - ٤(٠) + ٤(\frac{١}{٢}) - ٣|}{\sqrt{٤ + ١٦ + ١٦}} = \dfrac{١}{٦}$ وحدة طول.

٢٦

∵ $\dfrac{٢}{٤} = \dfrac{١}{٢} = \dfrac{٢}{٤} \neq \dfrac{-٨}{٥}$

∴ المستويان متوازيان وغير منطبقين

، بوضع س = ٠ ، ص = ٠ فى معادلة المستوى الأول

∴ ع = ٤

∴ (٠ ، ٠ ، ٤) ∋ للمستوى الأول

∴ البعد بين المستويين = طول العمود

من (٠ ، ٠ ، ٤) إلى المستوى الثانى

= $\dfrac{|٤(٠) + ٢(٠) + ٤(٤) + ٥|}{\sqrt{١٦ + ٤ + ١٦}}$

= $\dfrac{٢١}{٦} = ٣\dfrac{١}{٢}$ وحدة طول.

٢٧

بفرض (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$) ∋ للمستوى ط$_١$

∴ المسافة بين المستويين = طول العمود المرسوم

من (س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$)

إلى المستوى ط$_٢$

∴ المسافة بين المستويين =

$\dfrac{|أ س_١ + ب ص_١ + حـ ع_١ + ء_٢|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}}$

، من معادلة المستوى الأول

∴ أ س$_١$ + ب ص$_١$ + حـ ع$_١$ = −ء$_١$

∴ المسافة بين المستويين

= $\dfrac{|ء_٢ - ء_١|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢ + حـ^٢}}$ وحدة طول.

٢٨

∵ (١ ، −١ ، ٤) متجه اتجاه للمستقيم

، (١ ، ٥ ، ١) متجه اتجاه عمودى على المستوى

، ∵ (١ ، −١ ، ٤) . (١ ، ٥ ، ١) = ١ − ٥ + ٤ = ٠

∴ المستقيم يوازى المستوى

، ∵ (٢ ، −٢ ، ٣) ∋ للمستقيم ، معادلة المستوى هى

س + ٥ ص + ع − ٥ = ٠

∴ البعد بين المستقيم والمستوى

= طول العمود من (٢ ، −٢ ، ٣) إلى المستوى

= $\dfrac{|٢ + ٥(-٢) + ٣ - ٥|}{\sqrt{١ + ٢٥ + ١}} = \dfrac{١٠}{٣\sqrt{٣}}$ وحدة طول.

٢٩

(١) $\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (٢ ، −١ ، ٣) − (٠ ، −١ ، ١)

= (٢ ، ٠ ، ٢)

، $\overrightarrow{ب حـ} = \overrightarrow{حـ} - \overrightarrow{ب}$ = (−١ ، −٢ ، ٢)

− (٢ ، −١ ، ٣) = (−٣ ، −١ ، −١)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ

= $\overrightarrow{أب} \times \overrightarrow{ب حـ}$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & ٠ & ٢ \\ -٣ & -١ & -١ \end{vmatrix} = ٢\overrightarrow{س} - ٤\overrightarrow{ص} - ٢\overrightarrow{ع}$$

(٢) معادلة المستوى أ ب حـ هى :

$\overrightarrow{ر}$. (٢ ، −٤ ، −٢) = (٠ ، −١ ، ١) . (٢ ، −٤ ، −٢)

٢ س − ٤ ص − ٢ ع − ٢ = ٠

∴ طول العمود من ء

= $\dfrac{|٢(٧) - ٤(-٤) - ٢(٢) - ٢|}{\sqrt{٤ + ١٦ + ٤}} = ٢\sqrt{٦}$ وحدة طول.

(٣) $\overrightarrow{ب ء}$ = (٧ ، −٤ ، ٢) − (٢ ، −١ ، ٣)

= (٥ ، −٣ ، −١)

∴ متجه الاتجاه العمودى على المستوى ب حـ ء

$$= \overrightarrow{ب ء} \times \overrightarrow{ب حـ} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٥ & -٣ & -١ \\ -٣ & -١ & -١ \end{vmatrix}$$

= (٢ ، ٨ ، −١٤)

، ∵ (متجه الاتجاه العمودى على المستوى أ ب حـ)

. (متجه الاتجاه العمودى على المستوى ب حـ ء)

= (٢ ، −٤ ، −٢) . (٢ ، ٨ ، −١٤) = صفر

∴ المستويان متعامدان.

(٤) متجه الاتجاه العمودى على المستوى و ء ب

$$= \overrightarrow{و ء} \times \overrightarrow{و ب} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٧ & -٤ & ٢ \\ ٢ & -١ & ٣ \end{vmatrix}$$

= (−١٠ ، −١٧ ، ١)

، ∵ متجه الاتجاه العمودى للمستوى أ ب حـ

= (٢ ، −٤ ، −٢)

∴ متجه اتجاه خط التقاطع

= (٢ ، −٤ ، −٢) × (−١٠ ، −١٧ ، ١)

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{س} & \overrightarrow{ص} & \overrightarrow{ع} \\ ٢ & -٤ & -٢ \\ -١٠ & -١٧ & ١ \end{vmatrix} = (-٣٨ ، ١٨ ، -٧٤)$$

، ∵ ب ∋ للمستويين

∴ معادلة خط التقاطع هى :

$\overrightarrow{ر}$ = (٢ ، −١ ، ٣) + ك (−٣٨ ، ١٨ ، −٧٤)

٣٠

(١) المعادلة الإحداثية للمستوى س

$$= \begin{vmatrix} س - ١ & ص - ٤ & ع - ٢ \\ ١ - ١ & ٠ - ٤ & ٥ - ٢ \\ ٠ - ١ & ٨ - ٤ & -١ - ٢ \end{vmatrix} = ٠$$

$$∴ \begin{vmatrix} (س - ١) & (ص - ٤) & (ع - ٢) \\ ٠ & -٤ & ٣ \\ -١ & ٤ & -٣ \end{vmatrix} = ٠$$

∴ −٣ (ص − ٤) − ٤ (ع − ٢) = ٠

∴ ٣ ص + ٤ ع − ٢٠ = ٠

(٢) معادلة المستوى ص :

$\overrightarrow{ر}$. (١ ، ٢ ، ٢) = (٢ ، ٢ ، ٣) . (١ ، ٢ ، ٢)

∴ س + ٢ ص + ٢ ع − ١٢ = ٠

③ ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كلا المستويين

∴ ٣ (٠) + ٤ (ف) − ٢٠ = ٠

∴ ف = ٥

، ط + ٢ (٠) + ٢ (ف) −١٢ = ٠

∴ ط = ٢

④ متجه الاتجاه لخط التقاطع

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{\text{س}} & \overrightarrow{\text{ص}} & \overrightarrow{\text{ع}} \\ ٠ & ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = (−٢ ، ٤ ، −٣)$$

، ∵ (ط ، ٠ ، ف) تقع فى كل من المستويين

∴ (٢ ، ٠ ، ٥) تقع فى خط التقاطع

∴ معادلة خط التقاطع هى :

$\overrightarrow{\text{ر}}$ = (٢ ، ٠ ، ٥) + ك (−٢ ، ٤ ، −٣)

⑤ ∵ $\frac{|\text{٣ (١) + ٤ (ن) − ٢٠}|}{\sqrt{\text{٩+١٦}}}$

$= \frac{|\text{١ + ٢ (١) + ٢ (ن) − ١٢}|}{\sqrt{\text{١+٤+٤}}}$

∴ $\frac{|\text{٤ن − ١٧}|}{\text{٥}} = \frac{|\text{٢ن − ٩}|}{\text{٣}}$

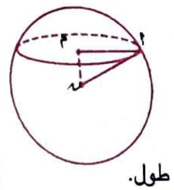
∴ ٥ |٢ن − ٩| = ٣ |٤ن − ١٧|

∴ ٥ (٢ن − ٩) = ± ٣ (٤ن − ١٧)

∴ ١٠ن − ٤٥ = ١٢ن − ٥١ ومنها ن = ٣

أ، ١٠ن − ٤٥ = −١٢ن + ٥١ ومنها ن = $\frac{\text{٤٨}}{\text{١١}}$

٣١



مركز الكرة هو ن (٠ ، ١ ، ٢)

وطول نصف قطرها أ ن

$= \sqrt{\text{١}^{\text{٢}} + \text{٢}^{\text{٢}} − (\text{−١١})}$ = ٤ وحدة طول.

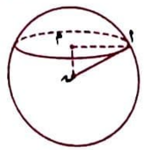
، عندما يقطع مستوى كرة فإن المقطع الناتج هو دائرة ويكون المستقيم الواصل بين مركزها ومركز الكرة عموديًا على مستوى الدائرة

∴ م ن = طول العمود من ن إلى المستوى

$= \frac{|\text{٠ + ٢ (١) + ٢ (٢) − ١٥}|}{\sqrt{\text{١+٤+٤}}}$ = ٣ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{\text{٤}^{\text{٢}} − \text{٣}^{\text{٢}}} = \sqrt{\text{٧}}$ وحدة طول.

٣٢



مركز الكرة هو ن (−٣ ، −٢ ، ١)

، طول نصف قطرها أ ن = $\sqrt{\text{١٥}}$

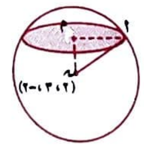
، ∵ م ن = $\frac{|\text{٢ (−٣) − (−٢) − ٢ (١) + ١٢}|}{\sqrt{\text{٤+١+٤}}}$

= ٢ وحدة طول.

∴ نق للدائرة = $\sqrt{\text{١٥ − ٤}} = \sqrt{\text{١١}}$ وحدة طول.

∴ مساحة المقطع الناتج = ١١ π وحدة مربعة.

٣٣



∵ محيط المقطع الناتج = ٨ π

∴ ٢ π نق = ٨ π

∴ نق للدائرة = ٤ وحدة طول

، ∵ طول العمود من ن إلى المستوى

$= \frac{|\text{٢ (٢) − ٢ (٣) + (−٢) − (−٢) − ١٥}|}{\sqrt{(\text{٢})^{\text{٢}} + (\text{−٢})^{\text{٢}} + (\text{١})^{\text{٢}}}}$ = ٣ وحدة طول.

∴ أ ن = $\sqrt{(\text{٤})^{\text{٢}} + (\text{٣})^{\text{٢}}}$ = ٥ وحدة طول.

∴ نق للكرة = ٥ وحدة طول.

∴ معادلة الكرة هى

$(\text{س − ٢})^{\text{٢}} + (\text{ص − ٣})^{\text{٢}} + (\text{ع + ٢})^{\text{٢}} = \text{٢٥}$

٣٤

بفرض (س ، ص ، ع) أى نقطة فى المستوى المطلوب

، ∵ المستوى المطلوب ينصف الزاوية بين المستويين

$\text{ط}_{\text{١}}$: ٧س + ص − ٦ = ٠

، $\text{ط}_{\text{٢}}$: ٣س + ٥ص − ٤ع + ١ = ٠

∴ البعد العمودى من (س ، ص ، ع) إلى كل من المستويين متساوى

∴ $\frac{|\text{٧س + ص − ٦}|}{\sqrt{\text{٤٩+١}}} = \frac{|\text{٣س + ٥ص − ٤ع + ١}|}{\sqrt{\text{٩+٢٥+١٦}}}$

∴ ٧س + ص − ٦ = ± (٣س + ٥ص − ٤ع + ١)

∴ ٧س + ص − ٦ = ٣س + ٥ص − ٤ع + ١

∴ ٤س − ٤ص + ٤ع − ٧ = ٠

أ، ٧س + ص − ٦ = −٣س − ٥ص + ٤ع − ١

∴ ١٠س + ٦ص − ٤ع − ٥ = ٠

أى أن هناك مستويين متعامدين أحدهما ينصف الزاوية الحادة بين المستويين $\text{ط}_{\text{١}}$ ، $\text{ط}_{\text{٢}}$ والآخر ينصف الزاوية المنفرجة بينهما.

الجزء الخاص بالإجابات

يصرف مجاناً مع الكتاب

6 223007 310642

/ElMoasser.eg

مكتبة الطلبة

للطبع و النشر و التوزيع

٣ شارع كامل صدقي - الفجالة

تليفون: ٢٥٩٠٢٩٩٧ - ٢٥٩٣٧٧٩١ - ٠٢/٢٥٩٣٤٠١٢

e-mail: info@elmoasserbooks.com

www.elmoasserbooks.com